



UNIVERSITÄT DORTMUND

Fachbereich Mathematik

Lehrstuhl IV

Stochastik und Analysis

Diplomarbeit

**Copulas und deren Anwendung auf die Steuerungsgröße Value-at-Risk im
Risikomanagement**

eingereicht im: Juni 2004

von: Oliver Meyer

geboren am 27. Juni 1974

in Recklinghausen

Betreuer: Professor Dr. Hans-Peter Scheffler

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Finanzwirtschaftliche Einordnung des Value-at-Risk	3
2.1	Risikomanagement	3
2.2	Value-at-Risk	3
2.2.1	Definitionen	3
2.2.2	Motivation	5
3	Copulas – die allgemeine Theorie	7
3.1	Grundlegende Voraussetzungen	7
3.2	Copulas im Zweidimensionalen	10
3.3	Satz von Sklar	15
3.4	Copulas und Zufallsvariablen	22
3.5	Copulas im n -Dimensionalen	24
4	Abhängigkeit	35
4.1	Lineare Korrelation	35
4.2	Komonotonie	36
4.3	Konkordanz	38
4.4	Kendalls τ und Spearmans ρ	41
4.5	Tail-Abhängigkeit	45
4.6	Quadranten-Abhängigkeit	47
4.7	Abhängigkeit im n -Dimensionalen	50
5	Spezielle Copulas	54
5.1	Archimedische Copulas	54
5.1.1	Definitionen und grundlegende Eigenschaften	54
5.1.2	Kendalls τ rekapituliert	61
5.1.3	Tail-Abhängigkeit rekapituliert	63
5.1.4	Archimedische Copulas im n -Dimensionalen	64
5.2	Gaußsche Copulas	66
6	Anwendungen	68

A Anhang	70
Symbolverzeichnis	72
Abbildungsverzeichnis	75
Tabellenverzeichnis	76
Literaturverzeichnis	77

1 Einleitung

Eine der Hauptaufgaben im Risikomanagement ist die Aggregation von Einzelrisiken, welche gewöhnlich durch Zufallsvariablen modelliert werden. Eines der Hauptprobleme liegt nun darin, die Abhängigkeitsstruktur der Zufallsvariablen in einem Portefeuille zu bestimmen. Ein Copula verkörpert gerade diese Abhängigkeitsstruktur und ist Gegenstand dieser Diplomarbeit. Copulas erlauben die getrennte Modellierung der einzelnen Risikofaktoren und der Abhängigkeitsstruktur zwischen den Risikofaktoren. Zusätzlich eröffnet uns dieses Vorgehen die Möglichkeit der separaten Anpassung und Validierung eindimensionaler Verteilungsfunktionen und Copulas, womit wir wertvolle Informationen über den strukturellen Aufbau des Gesamtproblems gewinnen können.

Diese Diplomarbeit wurde zur Erlangung des akademischen Grades als Diplom-Wirtschaftsmathematiker verfaßt. Da die Arbeit an einem Mathematikfachbereich geschrieben wurde, ist sie mathematisch ausgerichtet. Der wirtschaftswissenschaftliche Beitrag liegt in der Anwendung der Copulas auf die Steuerungsgröße Value-at-Risk, dessen Umfang dementsprechend einen geringen Teil dieser Diplomarbeit ausmacht.

In Kapitel 2 werden wir den Value-at-Risk zum einen definieren und zum anderen sowohl aus aufsichtsrechtlicher als auch aus finanzwirtschaftlicher Sicht motivieren und begründen. Neben einer juristischen Einordnung werden wir den Value-at-Risk entscheidungstheoretisch begründen, indem wir ihn mit dem Bernoulli-Prinzip vereinbaren.

In Kapitel 3 werden wir den Grundstein dieser Arbeit legen. Zunächst werden wir einige Grundlagen erläutern und anschließend Copulas im Zweidimensionalen untersuchen. Die wichtigste Aussage dieses Kapitels ist im zentralen Satz von Sklar begründet, welcher uns nahelegt, bei einem Copula von einer Abhängigkeitsstruktur zu sprechen. Zudem liefert er uns eine Methode, bei gegebenem Copula und gegebenen Verteilungsfunktionen eine gemeinsame Verteilungsfunktion zu bestimmen oder bei gegebener gemeinsamer Verteilungsfunktion mit gegebenen Randverteilungen ein Copula zu erzeugen. Diesen Satz werden wir dann auf Zufallsvariablen und deren Verteilungsfunktionen verallgemeinern und schließlich aufs n -Dimensionale erweitern. Des weiteren werden wir sehr viele wichtige und uns in späteren Kapiteln nützliche Eigenschaften der Copulas untersuchen.

Im 4. Kapitel werden wir neben der linearen Korrelation die für die Anwendung der Copulas wichtigen Copula-basierten Maße der Abhängigkeit vorstellen. Angefangen bei der Komonotonie, welche als „stärkste“ positive Abhängigkeit bezeichnet werden kann, werden wir dann zu den Konkordanz-Maßen Kendalls τ und Spearmans ρ übergehen, die ein Maß für die globale Abhängigkeit darstellen. Hieran anschließend werden wir das Konzept der Tail-Abhängigkeit erklären, welche ein lokales Maß der Abhängigkeit ist. Nach diesen Abhängigkeiten, welche alle eine Copula-Eigenschaft sind und somit invari-

ant unter streng monoton steigenden Transformationen der Zufallsvariablen, interessieren wir uns für die Quadranten-Abhängigkeit, die den „Mangel an Abhängigkeit“ bzw. das „Fehlen von Abhängigkeit“ beschreibt. Diese ist auch eine Copula-Eigenschaft und somit invariant unter streng monoton steigenden Transformationen. Das Kapitel werden wir mit der Verallgemeinerung einiger Abhängigkeitskonzepte aufs n -Dimensionale beenden.

In Kapitel 5 werden wir uns vorwiegend mit archimedischen Copulas beschäftigen, einer sehr wichtigen Klasse von Copulas. Diese Copulas finden vor allem Anwendung in der Finanzwirtschaft und im Versicherungswesen, da es sehr leicht ist, diese Copulas zu konstruieren, und eine Vielzahl von Copula-Familien zu dieser Klasse gehören, die zudem sehr schöne Eigenschaften besitzen. Neben den grundlegenden Eigenschaften werden wir einige Ein-Parameter-Familien vorstellen und sowohl Kendalls τ als auch die Tail-Abhängigkeit rekapitulieren. Anschließend werden wir die Erweiterung der archimedischen Copulas aufs n -Dimensionale motivieren und den Begriff des Quasi-Copulas einführen. Das Kapitel werden wir mit einer kurzen Einführung in sphärische und elliptische Verteilungen sowie in Gaußsche Copulas beenden.

Das Schlußkapitel 6 ist als Fazit dieser Diplomarbeit zu interpretieren. Wir werden dort nicht die alles umfassende Copula-basierte Formel vorstellen, die uns den Value-at-Risk berechnet, sondern vielmehr die von uns durch diese Arbeit gewonnenen Ergebnisse zusammenfassen. Dabei werden wir unser größtes Augenmerk auf die Resultate aus Kapitel 4 legen.

2 Finanzwirtschaftliche Einordnung des Value-at-Risk

In diesem Kapitel werden wir die Steuerungsgröße Value-at-Risk zum einen definieren und zum anderen sowohl aus aufsichtsrechtlicher als auch aus finanzwirtschaftlicher Sicht motivieren und begründen.

2.1 Risikomanagement

Bevor wir uns nun der Steuerungsgröße Value-at-Risk zuwenden, sollten wir den Begriff *Risikomanagement* definieren. Es ist allerdings in der Wirtschaftswissenschaft nicht immer möglich, eine einheitliche Definition für bestimmte Begrifflichkeiten festzulegen. Wir entscheiden uns nun für die in [FH99] auf Seite 556 angegebene Definition.

„Risikomanagement wird .. definiert als die Gesamtheit von Investitions- und Finanzierungsmaßnahmen mit dem Ziel, die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Unternehmenserfolgs zu optimieren.“ Optimierung ist in diesem Zusammenhang nicht gleichbedeutend mit Risikominimierung. Es soll vielmehr die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Unternehmenserfolgs bezüglich Ertrag und Risiko gemäß den Präferenzen der Kapitalgeber optimiert werden.

2.2 Value-at-Risk

2.2.1 Definitionen

Der Value-at-Risk (im Folgenden kurz VaR) gibt denjenigen Wertverlust eines Portefeuilles an, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit innerhalb einer vorgegebenen Frist nicht überschritten wird (vgl. [BS98]). Abbildung 2.1 (entnommen aus [BS98]) zeigt, daß der VaR das α -Quantil der Verteilung der Wertänderungen eines Portefeuilles ist, wobei $1 - \alpha$ die vorgegebene Wahrscheinlichkeit bezeichnet, d. h., unser Konfidenzniveau ist in diesem Falle durch $1 - \alpha$ gegeben. Das Ziel des VaR ist es also, eine Aussage der folgenden Form zu machen ([Hul99], S. 342): „We are X percent certain that we will not lose more than V dollars in the next N days.“ Die Variable V ist der VaR des Portefeuilles. Sie ist eine Funktion von zwei Parametern: N , dem Zeithorizont, und X , dem Konfidenzniveau. Wie in Abbildung 2.1 zu sehen, ist α hier „klein“ gewählt, da eine negative Wertänderung des Portefeuilles mit Verlusten korrespondiert, so daß wir wie oben schon

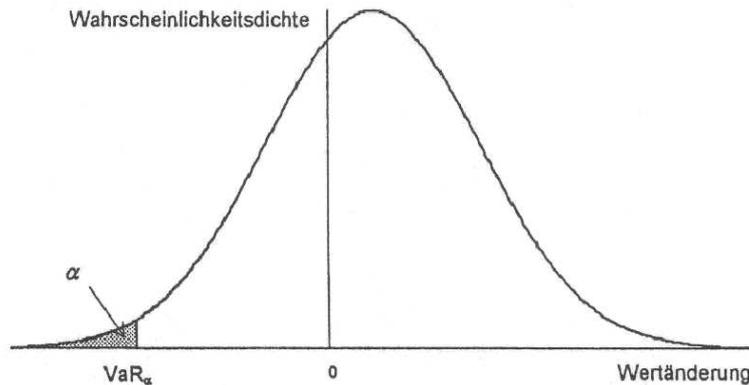


Abbildung 2.1: Value-at-Risk als Quantil der Verteilung der Wertänderungen eines Portefeuilles.

erwähnt als Konfidenzniveau $1 - \alpha$ gegeben haben. In der Literatur findet man aber häufig, daß α als Konfidenzniveau betrachtet wird und dementsprechend „groß“ sein muß. Dann werden negative Wertänderungen als Gewinne und positive Wertänderungen als Verluste interpretiert. Dieser Sichtweise werden wir uns anschließen und im Folgenden näher erläutern.

Wir wollen den VaR nun mathematisch definieren. Dazu sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F , welche die Gewinne und Verluste des risikobehafteten Finanztitels (der Zufallsvariable X) für einen bestimmten Zeithorizont τ beschreibt. Negative Werte von X werden als Gewinne und positive Werte von X als Verluste interpretiert.¹ Die Verteilungsfunktion F wird dann auch als *negative profit and loss distribution* (P&L) bezeichnet.

Definition 2.1 (Value-at-Risk) Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion F , welche die P&L des risikobehafteten Finanztitels X über einen bestimmten Zeithorizont τ beschreibt. Dann definieren wir den Value-at-Risk von X für ein Konfidenzniveau $0 < \alpha < 1$ durch

$$\text{VaR}_\alpha(X) = \inf\{x \mid F(x) \geq \alpha\} = F^{(-1)}(\alpha), \quad (2.1)$$

wobei $F^{(-1)}$ das Quasi-Inverse von F ist.²

Der Wert $\text{VaR}_\alpha(X)$ über dem Zeithorizont τ wird demnach durchschnittlich $100(1 - \alpha)$ -mal alle 100τ Zeiteinheiten überschritten.

¹Dies ist auch eine gebräuchliche Konvention im Risikomanagement, da es dann keine Zweideutigkeit gibt, wenn man von großen Verlusten spricht (große Werte von X korrespondieren mit großen Verlusten).

²Falls F streng monoton steigend, dann gilt $F^{(-1)} = F^{-1}$, wobei F^{-1} das gewöhnliche Inverse ist.

2.2.2 Motivation

Kreditinstitute sind verpflichtet, neben Ausfallrisiken auch Marktrisiken ihrer Wertpapierhandelsbestände mit Eigenkapital zu unterlegen [Bas96, EU-93]. Zu den Standardverfahren, die zur Ermittlung des zu unterlegenden Eigenkapitals dienen, werden zudem auch interne Risikomodelle zugelassen, die bestimmten Anforderungen genügen müssen.³ Der Modelltyp des VaR-Konzeptes wird vom Basler Ausschuß als „Marktstandard“ akzeptiert und ist im Entwurf des neuen Grundsatzes I des Bundesaufsichtamts für das Kreditwesen als eigenes Risikomodellel vorgesehen (vgl. [Bun97], §§ 32–37). Der Basler Ausschuß sieht bei internen Risikomodellel für den VaR gewöhnlich eine 10tägige Halteperiode mit einem Konfidenzniveau von $\alpha = 0,99$ vor.⁴ Der errechnete VaR muß dann noch mit einem Sicherheitsfaktor von mindestens 3 multipliziert werden. Dies bedeutet, daß das 3fache des VaR mit Eigenkapital zu unterlegen ist.

Der Sicherheitsmultiplikator von 3 wird von der Aufsicht gewählt, um die Solvenz der Unternehmen zu sichern. Eine weitere Argumentation für den Sicherheitsmultiplikator von 3 ist die in der Praxis oft getroffene Annahme von normalverteilten Renditen, obwohl diese doch häufig „heavy-tailed“ sind, so daß das Risiko oftmals unterschätzt wird. Wir werden dies im Folgenden verdeutlichen. Nehmen wir einmal an, die P&L von X wäre symmetrisch mit endlicher Varianz σ_X^2 . Bezeichne X den zufälligen Verlust über einem bestimmten Zeithorizont mit einem Erwartungswert von 0. Dann liefert uns die Tschebyscheff-Ungleichung zusammen mit der Symmetrie völlig ungeachtet der tatsächlichen Verteilung die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} P[|X - 0| \geq c\sigma_X] &\leq \frac{\sigma_X^2}{c^2\sigma_X^2} \\ \Leftrightarrow P[X \geq c\sigma_X] &\leq \frac{1}{2c^2}. \end{aligned}$$

Interessieren wir uns nun für den VaR mit einem Konfidenzniveau von $\alpha = 0,99$, dann setzen wir $1/2c^2 = 0,01$, so daß wir $c = 7,071$ erhalten. Dies impliziert $\text{VaR}_{\alpha=0,99}(X) = 7,071\sigma_X$. Hätten wir allerdings den VaR unter der Annahme einer Standardnormalverteilung berechnet, dann hätten wir $\text{VaR}_{\alpha=0,99}(X) = 2,326\sigma_X$ erhalten. Falls nun also die Verteilung tatsächlich „heavy-tailed“ wäre mit endlicher Varianz, dann wäre die Korrektur des $\text{VaR}_{\alpha=0,99}$ um den Sicherheitsmultiplikator von 3 vernünftig, denn es ist $3 \cdot 2,326\sigma_X = 6,978\sigma_X$.

Nach dieser juristischen Einordnung wird im Folgenden aus finanzwirtschaftlicher Sicht argumentiert. Die Ausführungen sind größtenteils an [FH99] angelehnt. Um den VaR als

³Zu Einzelheiten vgl. [BS98, Bun97]. Ein Vergleich verschiedener Value-at-Risk-Verfahren für Marktrisiken findet sich in der Studie von [BKS98]. Bewertungsmodelle für Kreditrisiken und deren Vergleich sind in [CGM00] zu finden.

⁴Zu den Bestimmungen des Konfidenzintervalls und der Halteperiode vgl. [Bas99] und [Deu98]. Unter bestimmten Voraussetzungen kann die Halteperiode auch 1 Tag betragen und das Konfidenzniveau mit $\alpha = 0,95$ gewählt werden. Der Zeithorizont beim Management der Kreditrisiken beträgt gewöhnlich 1 Jahr.

sinnvolle Steuerungsgröße zu interpretieren, ist es notwendig, daß man sich vom vollkommenen Kapitalmarkt löst und die Zusammenhänge zwischen Investitions- und Finanzierungspolitik stärker in den Vordergrund rückt. Auf einem vollkommenen Kapitalmarkt gibt es aufgrund des Irrelevanztheorems der Finanzierungspolitik keinen Anlaß für Unternehmen, Risikomanagement zu betreiben.⁵ Unvollkommenheiten des Kapitalmarktes, wie z. B. Transaktions- und Informationskosten, Insolvenzkosten, Steuern etc., lassen die Finanzierungspolitik und somit das Risikomanagement jedoch relevant werden.

Inwieweit ist es nun sinnvoll, die Risikopolitik auf die Insolvenzwahrscheinlichkeit oder ein Verlustpotential zu beziehen? Einflußreiche Gläubiger haben nach Kreditvergabe das Ziel, auf die Unternehmenspolitik so einzuwirken, daß die Insolvenzwahrscheinlichkeit vermindert wird. Des weiteren wird sich ein Unternehmen auch im Interesse reibungsloser Geschäftsbeziehungen zu Kunden und Lieferanten darum bemühen, die Insolvenzwahrscheinlichkeit gering zu halten, denn auch Lieferanten werden bei nicht vernachlässigbarer Insolvenzwahrscheinlichkeit eine Absicherung für den Insolvenzfall verlangen. Die Manager von Unternehmen weisen dem Kriterium „Insolvenzwahrscheinlichkeit“ vermutlich die größte Bedeutung zu. Sie beziehen ihr Arbeitseinkommen aus dem Unternehmen und werden mitverantwortlich gemacht, falls das Unternehmen insolvent wird. Ihr Arbeitsplatz ist bei Fortführung des Unternehmens gefährdet, und bei Verlust fällt es ihnen nicht leicht, einen vergleichbaren wiederzufinden. Aus diesem Grund sind Manager motiviert, die Insolvenzwahrscheinlichkeit auf niedrigem Niveau zu halten.

Unter diesen Voraussetzungen ist es also sinnvoll, die Risikopolitik auf die Insolvenzwahrscheinlichkeit zu beziehen. Im Folgenden wird dargelegt, wie der VaR aus der Portfeuille-Theorie abgeleitet werden kann. Neben der Portfolio-Selektion von Markowitz wurde der Safety-first-Ansatz entwickelt, der sich nur durch die verwendete Auswahlregel unterscheidet (vgl. [Rei99]). Dieser verwendet das Ausfallkriterium als Entscheidungsregel zur Auswahl unter riskanten Investitionsalternativen, wobei das Risiko mit der Wahrscheinlichkeit, eine vorgegebene Zielrendite zu verfehlen, korrespondiert. Beim Safety-first-Ansatz wird zudem eine spezielle Nutzenfunktion (vgl. [Rei99]) unterstellt, die dem Investor bei Realisation über einer vorgegebenen Zielrendite einen einheitlichen Nutzen und bei Unterschreitung der Zielrendite keinen Nutzen zuordnet. Diese Nutzenfunktion hat die Eigenschaft, daß die Maximierung des Erwartungsnutzens bei normalverteilten Renditen gerade gleichbedeutend mit der Minimierung der Ausfallwahrscheinlichkeit ist. Der Safety-first-Ansatz ist daher mit dem Bernoulli-Prinzip vereinbar.⁶ Dies trifft auch für den VaR zu, da dieser eine Anwendung des Safety-first-Ansatzes ist (vgl. [Rei99]). Somit ist das VaR-Konzept entscheidungstheoretisch begründet.

⁵Vgl. auch Separationstheorem für Investitions- und Finanzierungsentscheidungen, gleicher Marktzu- gang von Kapitalgebern und Unternehmen.

⁶Das Bernoulli-Prinzip besagt kurz ausgedrückt: Bei einer Entscheidung unter Risiko ist die optimale Handlungsalternative die mit dem maximalen Erwartungswert des Ergebnisnutzens. Eine ausführliche Erklärung ist in [FH99] zu finden.

3 Copulas – die allgemeine Theorie

In diesem Kapitel werden wir zunächst einige Grundlagen erläutern, um Copulas definieren zu können. Danach werden die wichtigsten Eigenschaften von Copulas vorgestellt und anhand von Beispielen und Abbildungen verdeutlicht werden. Dieses Kapitel beruht zum größten Teil auf der Vorlage Nelsens [Nel99].

3.1 Grundlegende Voraussetzungen

Dieser Abschnitt widmet sich dem Begriff der *2-dimensional steigenden Funktion* oder auch *quasi-monotonen Funktion*, einem zweidimensionalen Analogon zu monoton steigenden Funktionen im Eindimensionalen. Zunächst werden wir einige Begrifflichkeiten vorstellen. Unter $\overline{\mathbb{R}}$ verstehen wir die erweiterte Zahlengerade $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ oder $[-\infty, \infty]$, und unter $\overline{\mathbb{R}}^2$ entsprechend $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$. Ein *Rechteck* in $\overline{\mathbb{R}}^2$ ist das kartesische Produkt B von zwei abgeschlossenen Intervallen, $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$. Die *Eckpunkte* des Rechtecks B sind die Paare (x_1, y_1) , (x_1, y_2) , (x_2, y_1) und (x_2, y_2) . Eine *reellwertige Funktion H von 2 Veränderlichen* ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\text{Dom } H \subseteq \overline{\mathbb{R}}^2$ und Bildbereich $\text{Ran } H \subseteq \mathbb{R}$.

Definition 3.1 (*H*-Volumen eines Rechtecks) Seien $S_1, S_2 \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$, H sei eine Funktion mit Definitionsbereich $\text{Dom } H = S_1 \times S_2$. Sei $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$ ein Rechteck mit Eckpunkten in $\text{Dom } H$. Dann ist das *H*-Volumen von B gegeben durch

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1). \quad (3.1)$$

Bemerkung 3.1 Falls wir die *Differenzen 1.Ordnung* von H bez. des Rechtecks B definieren durch

$$\Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y) = H(x_2, y) - H(x_1, y) \text{ und } \Delta_{y_1}^{y_2} H(x, y) = H(x, y_2) - H(x, y_1),$$

dann ist das *H*-Volumen von B gegeben durch die *Differenz 2.Ordnung* von H bez. B ,

$$V_H(B) = \Delta_{y_1}^{y_2} \Delta_{x_1}^{x_2} H(x, y).$$

Definition 3.2 (*Quasi-Monotonie*) Eine reellwertige Funktion H von 2 Veränderlichen heißt *2-dimensional steigend* (oder *quasi-monoton*), falls $V_H(B) \geq 0$ für alle Rechtecke B mit Eckpunkten in $\text{Dom } H$ gilt.

Das bedeutet aber i. a. nicht, daß H in jedem Argument monoton steigend ist. Die Umkehrung gilt i. a. auch nicht. Dies verdeutlichen die beiden folgenden Beispiele.

Beispiel 3.1 Sei $H: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ mit $H(x, y) = \max(x, y)$. Dann ist H in jedem Argument monoton steigend, aber nicht 2-dimensional steigend. Denn es ist $V_H([0, 1]^2) = -1$, woraus folgt, daß H nicht 2-dimensional steigend ist. Zu zeigen bleibt, daß H in jedem Argument monoton steigend ist. Dazu sei y fest gewählt und $x_1 \leq x_2$. Dann gilt $H(x_1, y) = \max(x_1, y) \leq \max(x_2, y) = H(x_2, y)$. Für x fest und $y_1 \leq y_2$ analog.

Beispiel 3.2 Sei $H: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ mit $H(x, y) = (2x - 1)(2y - 1)$. Dann ist H 2-dimensional steigend, aber monoton fallend in x für alle $y \in]0, 1/2[$ und monoton fallend in y für alle $x \in]0, 1/2[$. Dazu sei $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \subseteq [0, 1]^2$ beliebig, dann gilt

$$\begin{aligned} V_H(B) &= (2x_2 - 1)(2y_2 - 1) - (2x_2 - 1)(2y_1 - 1) \\ &\quad - (2x_1 - 1)(2y_2 - 1) + (2x_1 - 1)(2y_1 - 1) \\ &= (2x_2 - 1)[(2y_2 - 1) - (2y_1 - 1)] + (2x_1 - 1)[(2y_1 - 1) - (2y_2 - 1)] \\ &= (2x_2 - 1)(2y_2 - 2y_1) + (2x_1 - 1)(2y_1 - 2y_2) \\ &= (2y_2 - 2y_1)[(2x_2 - 1) - (2x_1 - 1)] \\ &= \underbrace{(2y_2 - 2y_1)}_{\geq 0} \underbrace{(2x_2 - 2x_1)}_{\geq 0} \geq 0, \end{aligned}$$

und somit ist H 2-dimensional steigend. Um zu zeigen, daß H monoton fallend ist, sei $y \in]0, 1/2[$ fest, $x_1, x_2 \in [0, 1]$ mit $x_1 \leq x_2$. Dann gilt

$$H(x_1, y) = (2x_1 - 1) \underbrace{(2y - 1)}_{=: c < 0} = c2x_1 - c \geq c2x_2 - c = H(x_2, y),$$

für $x \in]0, 1/2[$ fest und $y_1, y_2 \in [0, 1]$ mit $y_1 \leq y_2$ analog.

Lemma 3.1 Seien $S_1, S_2 \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$, und H 2-dimensional steigend mit Definitionsbereich $S_1 \times S_2$. Seien $x_1, x_2 \in S_1$ mit $x_1 \leq x_2$ und $y_1, y_2 \in S_2$ mit $y_1 \leq y_2$. Dann ist $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ monoton steigend auf S_1 und $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ monoton steigend auf S_2 .

Beweis: Seien $t_1, t_2 \in S_1$ mit $t_1 \leq t_2$.

$$\begin{aligned} \text{Zu zeigen: } & H(t_1, y_2) - H(t_1, y_1) \leq H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1) \\ \Leftrightarrow & H(t_2, y_2) - H(t_2, y_1) - H(t_1, y_2) + H(t_1, y_1) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & V_H(B) \geq 0 \text{ mit } B := [t_1, t_2] \times [y_1, y_2]. \end{aligned}$$

Für S_2 analog. □

Definition 3.3 (geerdete Funktion) S_1 habe ein kleinstes Element a_1 , und S_2 habe ein kleinstes Element a_2 . Wir sagen, eine Funktion $H: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist geerdet, falls $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$ für alle $(x, y) \in S_1 \times S_2$.

Lemma 3.2 Seien $S_1, S_2 \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$, und H eine geerdete 2-dimensional steigende Funktion mit Definitionsbereich $S_1 \times S_2$. Dann ist H monoton steigend in jedem Argument.

Beweis: Seien a_1 und a_2 die kleinsten Elemente von S_1 bzw. S_2 . Nun setze $x_1 = a_1$ und $y_1 = a_2$ in Lemma 3.1. Damit folgt die Behauptung. \square

Definition 3.4 (Ränder) S_1 habe ein größtes Element b_1 , und S_2 habe ein größtes Element b_2 . Dann sagen wir, eine Funktion $H: S_1 \times S_2 \rightarrow \mathbb{R}$ hat Ränder. Die Ränder von H sind die Funktionen F und G , gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{Dom } F &= S_1, F(x) = H(x, b_2) \text{ für alle } x \in S_1 \text{ und} \\ \text{Dom } G &= S_2, G(y) = H(b_1, y) \text{ für alle } y \in S_2. \end{aligned}$$

Beispiel 3.3 Sei H eine Funktion mit Definitionsbereich $[-1, 1] \times [0, \infty]$, gegeben durch

$$H(x, y) = \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}.$$

Dann ist H geerdet, da $H(x, 0) = 0$ und $H(-1, y) = 0$, und H hat die Ränder F und G , gegeben durch

$$F(x) = H(x, \infty) = (x+1)/2 \quad \text{und} \quad G(y) = H(1, y) = 1 - e^{-y}.$$

Lemma 3.3 Seien $S_1, S_2 \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $S_1 \neq \emptyset \neq S_2$, und H eine geerdete 2-dimensional steigende Funktion mit Definitionsbereich $S_1 \times S_2$ und Rändern F und G . Seien (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus $S_1 \times S_2$ beliebig. Dann gilt

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Beweis: Aus der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| + |H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)|.$$

Sei nun $x_1 \leq x_2$. H ist geerdet, 2-dimensional steigend und hat Ränder, daher liefern die Lemmata 3.1 und 3.2 die Beziehungen $0 \leq H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2) \leq H(x_2, b_2) - H(x_1, b_2) = F(x_2) - F(x_1)$. Falls $x_2 \leq x_1$, gilt die Umkehrung der Ungleichung. Daher folgt für beliebige $x_1, x_2 \in S_1$ $|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_2)| \leq |F(x_2) - F(x_1)|$. Analog erhalten wir für beliebige $y_1, y_2 \in S_2$ $|H(x_1, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |G(y_2) - G(y_1)|$. Damit ist alles gezeigt. \square

3.2 Copulas im Zweidimensionalen

Wir sind nun in der Lage, Copulas zu definieren, welche spezielle geerdete 2-dimensional steigende Funktionen mit Rändern sind.

Definition 3.5 (Subcopula) *Ein 2-dimensionales Subcopula (im Folgenden kurz Subcopula) ist eine Funktion C' mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $\text{Dom } C' = S_1 \times S_2$, wobei $S_1, S_2 \subseteq [0, 1]$ und $\{0, 1\} \subseteq S_1, S_2$,
2. C' ist geerdet und 2-dimensional steigend,
3. für alle $u \in S_1$ und alle $v \in S_2$ gilt

$$C'(u, 1) = u \text{ und } C'(1, v) = v. \quad (3.2)$$

Wir beachten, daß für alle $(u, v) \in \text{Dom } C'$ die Beziehung $0 \leq C'(u, v) \leq 1$ gilt, so daß $\text{Ran } C'$ auch eine Teilmenge von $[0, 1]$ ist.

Definition 3.6 (Copula) *Ein 2-dimensionales Copula (im Folgenden kurz Copula) ist ein Subcopula mit Definitionsbereich $[0, 1]^2$. Ein Copula ist also eine Funktion $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. Für alle $u, v \in [0, 1]$ gilt

$$C(u, 0) = 0 = C(0, v) \quad (3.3)$$

und

$$C(u, 1) = u \text{ und } C(1, v) = v, \quad (3.4)$$

2. für alle $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0, 1]$ mit $u_1 \leq u_2$ und $v_1 \leq v_2$ gilt

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0. \quad (3.5)$$

Da $C(u, v) = V_C([0, u] \times [0, v])$, wird dem Rechteck $[0, u] \times [0, v]$ mittels $C(u, v)$ ein Wert in $[0, 1]$ zugeordnet. Bei (3.5) handelt es sich natürlich um das C -Volumen des Rechtecks $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$ und erklärt, daß dieses nichtnegativ sein muß.

Der Unterschied zwischen einem Subcopula und einem Copula ist also der Definitionsbereich und erscheint auf den ersten Blick nicht gravierend. Im nächsten Abschnitt jedoch, wenn wir den Satz von Sklar untersuchen, werden wir feststellen, daß die Unterscheidung zwischen Subcopulas und Copulas von großer Bedeutung ist. Des weiteren sind viele wichtige Eigenschaften von Copulas auch Eigenschaften von Subcopulas.

Satz 3.4 *Sei C' ein Subcopula. Dann gilt für jedes Paar $(u, v) \in \text{Dom } C'$*

$$\max(u + v - 1, 0) \leq C'(u, v) \leq \min(u, v). \quad (3.6)$$

Beweis: Sei $(u, v) \in \text{Dom } C'$ beliebig. Mit Lemma 3.2 und (3.2) gilt $C'(u, v) \leq C'(u, 1) = u$ und $C'(u, v) \leq C'(1, v) = v$, also folgt $C'(u, v) \leq \min(u, v)$. Aus $V_{C'}([u, 1] \times [v, 1]) \geq 0$ und (3.1) folgt $C'(u, v) \geq u + v - 1$. Kombinieren wir dies mit $C'(u, v) \geq 0$, so erhalten wir $C'(u, v) \geq \max(u + v - 1, 0)$. \square

Da jedes Copula ein Subcopula ist, gilt (3.6) auch für Copulas. Tatsächlich sind die Schranken in (3.6) selbst wieder Copulas (siehe Satz 3.5) und werden mit $M(u, v) = \min(u, v)$ und $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ bezeichnet. Daher gilt für jedes Copula C und jedes Paar $(u, v) \in [0, 1]^2$

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v). \quad (3.7)$$

Definition 3.7 (Fréchet-Hoeffding-Schranken-Ungleichung) *Ungleichung (3.7) ist die Copula-Variante der Fréchet-Hoeffding-Schranken-Ungleichung. M wird als obere Fréchet-Hoeffding-Schranke und W als untere Fréchet-Hoeffding-Schranke bezeichnet.*

Bemerkung 3.2 Die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W ist im n -Dimensionalen für $n \geq 3$ niemals ein Copula, siehe Beispiel 2.2 in [ELM01].

Ein drittes wichtiges Copula ist das *Produkt-Copula* $\Pi(u, v) = uv$.

Satz 3.5 *Die Fréchet-Hoeffding-Schranken M und W sowie das Produkt-Copula Π sind Copulas.*

Beweis: Es sind die Nummern (3.3), (3.4) und (3.5) aus Definition 3.6 zu zeigen. Gleichungen (3.3) und (3.4) sind für alle drei Copulas trivial. Es bleibt also nur (3.5) zu zeigen. Wir beginnen mit Π und erhalten mit den Voraussetzungen von (3.5)

$$\begin{aligned} & \Pi(u_2, v_2) - \Pi(u_2, v_1) - \Pi(u_1, v_2) + \Pi(u_1, v_1) \\ &= u_2v_2 - u_2v_1 - u_1v_2 + u_1v_1 = u_2(v_2 - v_1) - u_1(v_2 - v_1) \\ &= \underbrace{(v_2 - v_1)}_{\geq 0} \underbrace{(u_2 - u_1)}_{\geq 0} \geq 0. \end{aligned}$$

Für M ist Folgendes zu zeigen:

$$\min(u_2, v_2) - \min(u_2, v_1) - \min(u_1, v_2) + \min(u_1, v_1) \geq 0.$$

Dazu sind 6 Fälle zu unterscheiden:

1. $u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2$, dann gilt $u_2 - u_2 - u_1 + u_1 = 0$,
2. $u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2$, dann gilt $u_2 - v_1 - u_1 + u_1 \geq 0$,
3. $v_1 \leq u_1 \leq u_2 \leq v_2$, dann gilt $u_2 - v_1 - u_1 + v_1 \geq 0$,

4. $v_1 \leq v_2 \leq u_1 \leq u_2$, dann gilt $v_2 - v_1 - v_2 + v_1 = 0$,
5. $v_1 \leq u_1 \leq v_2 \leq u_2$, dann gilt $v_2 - v_1 - u_1 + v_1 \geq 0$,
6. $u_1 \leq v_1 \leq v_2 \leq u_2$, dann gilt $v_2 - v_1 - u_1 + u_1 \geq 0$.

Für W bleibt zu zeigen:

$$\max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \geq 0.$$

Falls $u_2 + v_2 - 1 \leq 0$, dann sind natürlich alle Summanden gleich null und es folgt die Behauptung. Also sei nun $u_2 + v_2 - 1 \geq 0$. Wir betrachten nun den ungünstigsten Fall, falls $u_2 + v_1 - 1 \geq 0$ und $u_1 + v_2 - 1 \geq 0$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} & \max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= u_2 + v_2 - 1 - u_2 - v_1 + 1 - u_1 - v_2 + 1 + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= 1 - v_1 - u_1 + \max(u_1 + v_1 - 1, 0). \end{aligned}$$

Nun ist immer $\max(u_1 + v_1 - 1, 0) \geq 0$, also ist es am ungünstigsten, falls $1 - v_1 - u_1 \leq 0$. Dies aber impliziert $\max(u_1 + v_1 - 1, 0) = u_1 + v_1 - 1$, so daß wir zusammengefaßt Folgendes erhalten:

$$\begin{aligned} & \max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= u_2 + v_2 - 1 - u_2 - v_1 + 1 - u_1 - v_2 + 1 + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= 1 - v_1 - u_1 + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= 1 - v_1 - u_1 + u_1 + v_1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Falls nun $u_2 + v_1 - 1 \geq 0$ und $u_1 + v_2 - 1 \leq 0$, so folgt

$$\begin{aligned} & \max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= u_2 + v_2 - 1 - u_2 - v_1 + 1 + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= \underbrace{v_2 - v_1}_{\geq 0} + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \geq 0, \end{aligned}$$

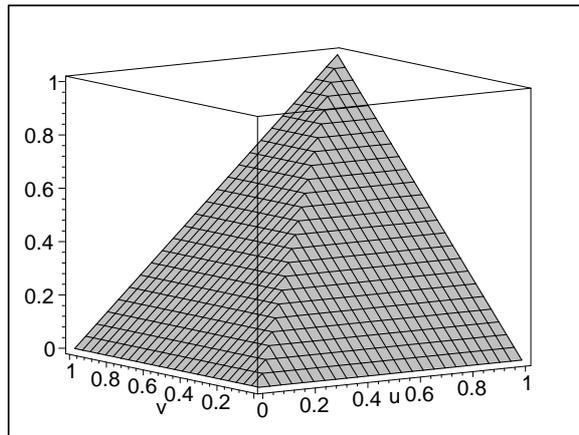
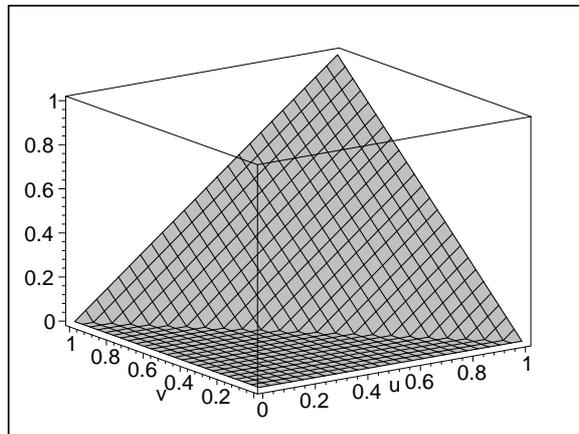
und falls $u_2 + v_1 - 1 \leq 0$ und $u_1 + v_2 - 1 \geq 0$, so folgt

$$\begin{aligned} & \max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= u_2 + v_2 - 1 - u_1 - v_2 + 1 + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= \underbrace{u_2 - u_1}_{\geq 0} + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \geq 0, \end{aligned}$$

und zu guter Letzt, falls $u_2 + v_1 - 1 \leq 0$ und $u_1 + v_2 - 1 \leq 0$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ &= u_2 + v_2 - 1 + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \geq 0. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

Abbildung 3.1: Die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke M .Abbildung 3.2: Die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W .

Der folgende Satz begründet die Stetigkeit von Subcopulas, und somit für Copulas, durch eine Lipschitz-Bedingung auf $[0, 1]^2$.

Satz 3.6 Sei C' ein Subcopula. Dann gilt für alle $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \text{Dom } C'$

$$|C'(u_2, v_2) - C'(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|. \quad (3.8)$$

Somit ist C' gleichmäßig stetig auf seinem Definitionsbereich.

Beweis: Die Behauptung folgt direkt aus Lemma 3.3, da $F(u_2) = C'(u_2, 1) = u_2$, $F(u_1) = C'(u_1, 1) = u_1$, $G(v_2) = C'(1, v_2) = v_2$ und $G(v_1) = C'(1, v_1) = v_1$. \square

Aus Definition 3.6 und Satz 3.6 folgt, daß der Graph eines jeden Copulas eine stetige Oberfläche innerhalb des Einheitswürfels $[0, 1]^3$ darstellt, dessen Begrenzung durch

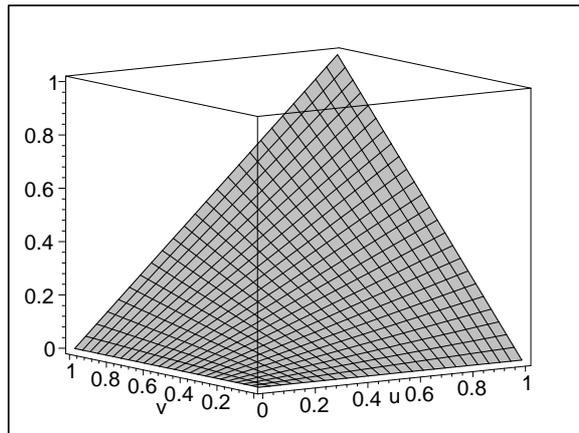
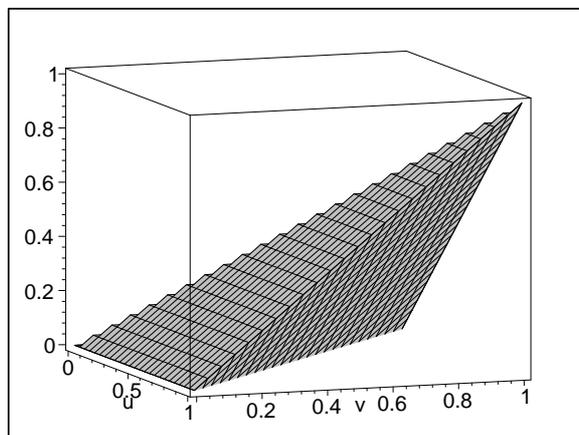


Abbildung 3.3: Das Produkt-Copula II.

Abbildung 3.4: Der von M und W erzeugte Vierflächner.

das schiefe Vierseit mit den Eckpunkten $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(1, 1, 1)$ gegeben ist. Satz 3.4 besagt, daß dieser Graph zwischen den Graphen der Fréchet-Hoeffding-Schranken M und W liegt. Diese beiden Graphen sind in den Abbildungen 3.1 und 3.2 dargestellt. Exemplarisch ist der Graph des Produkt-Copulas II in Abbildung 3.3 zu sehen. Um diese Beziehung noch stärker zu verdeutlichen, zeigt Abbildung 3.4 die Graphen von M und W in einem Einheitswürfel zusammengefaßt, welche nun einen Vierflächner erzeugen. Der Graph eines beliebigen Copulas „verschwindet“ somit gewissermaßen in diesem Vierflächner.

Definition 3.8 (Schnitte eines Copulas) Sei C ein Copula und $a \in [0, 1]$ beliebig. Der horizontale Schnitt von C in der Höhe a ist die Funktion von $[0, 1]$ nach $[0, 1]$ mit $t \mapsto C(t, a)$, der vertikale Schnitt von C in der Höhe a ist die Funktion von $[0, 1]$ nach $[0, 1]$ mit $t \mapsto C(a, t)$, und der diagonale Schnitt von C ist die Funktion $\delta_C : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$,

definiert durch $\delta_C(t) = C(t, t)$.

Korollar 3.7 *Die horizontalen, vertikalen und diagonalen Schnitte eines Copulas sind alle monoton steigend und gleichmäßig stetig auf $[0, 1]$.*

Beweis: Lemma 3.2 und Satz 3.6 gelten für Copulas und damit insbesondere für die Einschränkung auf die Schnitte. \square

Satz 3.8 *Sei C ein Copula. Dann existiert für $v \in [0, 1]$ beliebig die partielle Ableitung $\partial C/\partial u$ fast sicher¹ (f. s.) für alle u , und für diese v und u gilt*

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial u} C(u, v) \leq 1. \quad (3.9)$$

Analog existiert für $u \in [0, 1]$ beliebig die partielle Ableitung $\partial C/\partial v$ f. s. für alle v , und für diese u und v gilt

$$0 \leq \frac{\partial}{\partial v} C(u, v) \leq 1. \quad (3.10)$$

Des Weiteren sind die Funktionen $u \mapsto \partial C(u, v)/\partial v$ und $v \mapsto \partial C(u, v)/\partial u$ definiert und f. s. monoton steigend auf $[0, 1]$.

Beweis: Die Existenz der partiellen Ableitungen $\partial C/\partial u$ und $\partial C/\partial v$ ist klar, da monotone Funktionen (es handelt sich hierbei um die horizontalen und vertikalen Schnitte des Copulas C) f. s. differenzierbar sind. Die Ungleichungen (3.9) und (3.10) folgen aus Abschätzung (3.8), indem wir $v_1 = v_2$ bzw. $u_1 = u_2$ setzen, so daß wir die Differenzenquotienten erhalten. Falls $v_1 \leq v_2$, dann folgt aus Lemma 3.1, daß die Funktion $u \mapsto C(u, v_2) - C(u, v_1)$ monoton steigend ist. Daher ist $\partial(C(u, v_2) - C(u, v_1))/\partial u$ definiert und f. s. nichtnegativ auf $[0, 1]$, woraus folgt, daß $v \mapsto \partial C(u, v)/\partial u$ definiert ist und f. s. monoton steigend auf $[0, 1]$. Für $u \mapsto \partial C(u, v)/\partial v$ analog. \square

3.3 Satz von Sklar

Bevor wir uns dem zentralen *Satz von Sklar* zuwenden, werden wir kurz Verteilungsfunktionen vorstellen und zwei wichtige Lemmata, die dem Beweis des Satzes von Sklar dienen, voranstellen.

Definition 3.9 (Verteilungsfunktion) *Eine Verteilungsfunktion ist eine Funktion F mit Definitionsbereich $\overline{\mathbb{R}}$, so daß gilt:*

1. F ist monoton steigend,
2. $F(-\infty) = 0$ und $F(+\infty) = 1$.

¹Bis auf eine P-Nullmenge, wobei hier ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ unterstellt wird.

Beispiel 3.4 Sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann ist bekannterweise auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (hierbei bezeichne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R}) das Punktmaß ε_a definiert als

$$\varepsilon_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A, \\ 0, & a \notin A. \end{cases}$$

Dann ist die Verteilungsfunktion gegeben durch

$$F_{\varepsilon_a}(x) = \varepsilon_a(]-\infty, x]) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ 1, & x \geq a. \end{cases}$$

Anstatt F_{ε_a} schreiben wir auch kurz ε_a . Wir nennen ε_a auch *Heaviside-Funktion* oder *Dirac-Verteilung*.

Beispiel 3.5 Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ ist die (*kontinuierliche*) *Gleichverteilung* auf $[a, b]$ gegeben durch die Verteilungsfunktion

$$U_{ab}(x) = \begin{cases} 0, & x \in]-\infty, a[, \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 1, & x \in]b, \infty]. \end{cases}$$

Definition 3.10 (gemeinsame Verteilungsfunktion) Eine gemeinsame (oder hier 2-dimensionale) Verteilungsfunktion ist eine Funktion H mit Definitionsbereich $\overline{\mathbb{R}}^2$, so daß gilt:

1. H ist 2-dimensional steigend,
2. $H(x, -\infty) = H(-\infty, y) = 0$ und $H(+\infty, +\infty) = 1$.

Somit ist H geerdet, und da $\text{Dom } H = \overline{\mathbb{R}}^2$ gilt, hat H die Ränder F und G mit $F(x) = H(x, +\infty)$ und $G(y) = H(+\infty, y)$. Mit Lemma 3.2 sind F und G Verteilungsfunktionen. Die Ränder sind nun *Randverteilungen*.

Lemma 3.9 Sei H eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F und G . Dann existiert ein eindeutig bestimmtes Subcopula C' , so daß gilt:

1. $\text{Dom } C' = \text{Ran } F \times \text{Ran } G$,
2. $H(x, y) = C'(F(x), G(y))$ für alle $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$.

Beweis: Die gemeinsame Verteilungsfunktion H genügt der Aussage von Lemma 3.3 mit $S_1 = S_2 = \overline{\mathbb{R}}$. Daher gilt für beliebige Paare (x_1, y_1) und (x_2, y_2) aus $\overline{\mathbb{R}}^2$

$$|H(x_2, y_2) - H(x_1, y_1)| \leq |F(x_2) - F(x_1)| + |G(y_2) - G(y_1)|.$$

Falls $F(x_1) = F(x_2)$ und $G(y_1) = G(y_2)$, folgt sofort $H(x_1, y_1) = H(x_2, y_2)$. Daher wird durch die Menge der geordneten Paare

$$\{((F(x), G(y)), H(x, y)) \mid x, y \in \overline{\mathbb{R}}\}$$

eine reellwertige Funktion C' von 2 Veränderlichen definiert mit Definitionsbereich $\text{Ran } F \times \text{Ran } G$. Also gilt $C': \text{Ran } F \times \text{Ran } G \rightarrow [0, 1]$. Daß diese Funktion wirklich ein Subcopula ist, folgt direkt aus den Eigenschaften von H . Natürlich ist $\text{Ran } F \subseteq [0, 1]$, $\text{Ran } G \subseteq [0, 1]$, $\{0, 1\} \subseteq \text{Ran } F$ und $\{0, 1\} \subseteq \text{Ran } G$. C' ist geerdet und 2-dimensional steigend, da H geerdet und 2-dimensional steigend ist. Bleibt Aussage (3.2) zu zeigen. Zu jedem $u \in \text{Ran } F$ existiert ein $x \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $F(x) = u$. Also erhalten wir $C'(u, 1) = C'(F(x), G(+\infty)) = H(x, +\infty) = F(x) = u$. Für $v \in \text{Ran } G$ analog. \square

Lemma 3.10 (Fortsetzungslemma) *Sei C' ein Subcopula. Dann existiert ein Copula C , so daß $C(u, v) = C'(u, v)$ für alle $(u, v) \in \text{Dom } C'$. Somit kann jedes Subcopula zu einem Copula fortgesetzt werden. Die Fortsetzung ist i. a. nicht eindeutig.*

Beweis: Sei $\text{Dom } C' = S_1 \times S_2$. Mit Satz 3.6 und der Tatsache, daß C' in jedem Argument monoton steigend ist, können wir C' stetig fortsetzen zu einer Funktion C'' mit Definitionsbereich $\overline{S}_1 \times \overline{S}_2$, wobei \overline{S}_1 der Abschluß von S_1 ist und \overline{S}_2 der Abschluß von S_2 . C'' ist natürlich auch ein Subcopula. Als nächstes setzen wir C'' zu einer Funktion C mit Definitionsbereich $[0, 1]^2$ fort. Dazu sei $(a, b) \in [0, 1]^2$ beliebig, und seien $a_1, a_2 \in \overline{S}_1$ die größten bzw. kleinsten Elemente, die der Ungleichung $a_1 \leq a \leq a_2$ genügen, und seien $b_1, b_2 \in \overline{S}_2$ die größten bzw. kleinsten Elemente, die der Ungleichung $b_1 \leq b \leq b_2$ genügen. Falls $a \in \overline{S}_1$, so folgt trivialerweise $a_1 = a = a_2$, und falls $b \in \overline{S}_2$, so folgt ebenso $b_1 = b = b_2$. Nun sei

$$\alpha_1 = \begin{cases} \frac{a-a_1}{a_2-a_1}, & a_1 < a_2, \\ 1, & a_1 = a_2, \end{cases}$$

und

$$\beta_1 = \begin{cases} \frac{b-b_1}{b_2-b_1}, & b_1 < b_2, \\ 1, & b_1 = b_2, \end{cases}$$

und wir definieren folgende *bilineare Interpolation* C durch

$$\begin{aligned} C(a, b) &= (1 - \alpha_1)(1 - \beta_1)C''(a_1, b_1) + (1 - \alpha_1)\beta_1C''(a_1, b_2) \\ &\quad + \alpha_1(1 - \beta_1)C''(a_2, b_1) + \alpha_1\beta_1C''(a_2, b_2). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Es ist offensichtlich, daß $\text{Dom } C = [0, 1]^2$ und daß $C(a, b) = C''(a, b)$ für $(a, b) \in \text{Dom } C''$ beliebig. Außerdem genügt C den Gleichungen (3.3) und (3.4). Es bleibt also Ungleichung (3.5) zu zeigen. Dazu sei $(c, d) \in [0, 1]^2$ ein weiterer Punkt, so daß $c \geq a$ und $d \geq b$

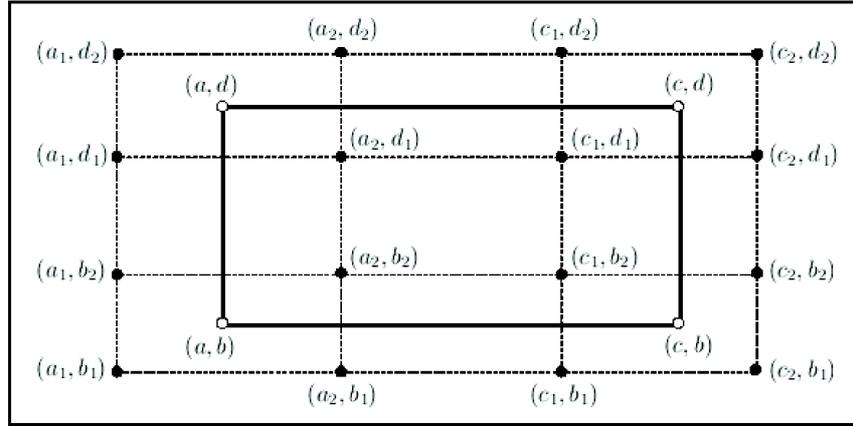


Abbildung 3.5: Kompliziertester Fall im Beweis von Lemma 3.10.

gilt. Die Werte $c_1, d_1, c_2, d_2, \alpha_2, \beta_2$ seien so zu c und d gewählt, wie oben $a_1, b_1, a_2, b_2, \alpha_1, \beta_1$ zu a und b . Um nun $V_C(B)$ für das Rechteck $B = [a, c] \times [b, d]$ zu berechnen, müssen einige Fälle in Betrachtung gezogen werden, abhängig davon, ob ein Punkt aus \bar{S}_1 genau zwischen a und c liegt oder nicht und ob ein Punkt aus \bar{S}_2 genau zwischen b und d liegt oder nicht. Im einfachsten Fall gibt es weder einen Punkt aus \bar{S}_1 genau zwischen a und c , noch gibt es einen Punkt aus \bar{S}_2 genau zwischen b und d , so daß $c_1 = a_1, c_2 = a_2, d_1 = b_1$ und $d_2 = b_2$. (3.11) angewandt auf $C(a, b), C(a, d), C(c, b)$ und $C(c, d)$ liefert nun nach langer Rechnung und Vereinfachung

$$\begin{aligned} V_C(B) &= V_C([a, c] \times [b, d]) = C(a, b) - C(a, d) - C(c, b) + C(c, d) \\ &= \dots = (\alpha_2 - \alpha_1)(\beta_2 - \beta_1)V_C([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]). \end{aligned}$$

In diesem Fall ist $V_C(B) \geq 0$, da aus $c \geq a$ natürlich $\alpha_2 \geq \alpha_1$ folgt und ebenso aus $d \geq b$ natürlich $\beta_2 \geq \beta_1$. Der komplizierteste Fall tritt ein, falls mindestens ein Punkt aus \bar{S}_1 genau zwischen a und c existiert und mindestens ein Punkt aus \bar{S}_2 genau zwischen b und d , so daß $a < a_2 \leq c_1 < c$ und $b < b_2 \leq d_1 < d$ gelten. Dieser Fall ist in Abbildung 3.5 dargestellt. Mit (3.11) angewandt auf $C(a, b), C(a, d), C(c, b)$ und $C(c, d)$ erhalten wir nach Umordnung der Terme

$$\begin{aligned} V_C(B) &= (1 - \alpha_1)\beta_2 V_C([a_1, a_2] \times [d_1, d_2]) + \beta_2 V_C([a_2, c_1] \times [d_1, d_2]) \\ &\quad + \alpha_2\beta_2 V_C([c_1, c_2] \times [d_1, d_2]) + (1 - \alpha_1)V_C([a_1, a_2] \times [b_2, d_1]) \\ &\quad + V_C([a_2, c_1] \times [b_2, d_1]) + \alpha_2 V_C([c_1, c_2] \times [b_2, d_1]) \\ &\quad + (1 - \alpha_1)(1 - \beta_1)V_C([a_1, a_2] \times [b_1, b_2]) \\ &\quad + (1 - \beta_1)V_C([a_2, c_1] \times [b_1, b_2]) + \alpha_2(1 - \beta_1)V_C([c_1, c_2] \times [b_1, b_2]). \end{aligned} \tag{3.12}$$

Die rechte Seite der Gleichung (3.12) ist die Summe von 9 nichtnegativen C -Volumina (in Abbildung 3.5 durch die gestrichelten Linien dargestellt) mit nichtnegativen Koeffizienten und ist somit auch nichtnegativ. Die beiden übrigen Fälle funktionieren analog. \square

Beispiel 3.6 Sei $(a, b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ beliebig und die folgende Verteilungsfunktion H gegeben:

$$H(x, y) = \begin{cases} 0, & x < a \text{ oder } y < b, \\ 1, & x \geq a \text{ und } y \geq b. \end{cases}$$

Die Randverteilungen von H sind die Heaviside-Funktionen ε_a und ε_b . Mit Lemma 3.9 erhalten wir das Subcopula C' mit Definitionsbereich $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$, so daß $C'(0, 0) = C'(0, 1) = C'(1, 0) = 0$ und $C'(1, 1) = 1$. Die Fortsetzung von C' mit Lemma 3.10 führt zu $C = \Pi$, d. h. $C(u, v) = uv$ (aus Gleichung (3.11)). Dieses C ist natürlich nicht eindeutig, denn in diesem Falle ist jedes beliebige Copula eine Fortsetzung von C' , da jedes beliebige Copula auf dem Definitionsbereich von C' mit C' übereinstimmt.

Satz 3.11 (Satz von Sklar) Sei H eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F und G . Dann existiert ein Copula C , so daß für alle $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt:

$$H(x, y) = C(F(x), G(y)). \quad (3.13)$$

Falls F und G stetig, dann ist C eindeutig bestimmt. Anderenfalls ist C eindeutig auf $\text{Ran } F \times \text{Ran } G$ bestimmt. Umgekehrt gilt: Falls C ein Copula ist und F, G Verteilungsfunktionen sind, dann ist die in (3.13) definierte Funktion H eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F und G .

Beweis: Die Existenz eines Copulas C , so daß (3.13) für alle $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ gilt, folgt direkt aus den Lemmata 3.9 und 3.10. Falls F und G stetig, dann ist $\text{Ran } F = \text{Ran } G = [0, 1]$, so daß das eindeutige Subcopula in Lemma 3.9 ein Copula ist. Die Umkehrung folgt direkt aus den Definitionen und Eigenschaften der Verteilungsfunktionen und des Copulas. H ist 2-dimensional steigend, da C 2-dimensional steigend; der Definitionsbereich von H ist $\overline{\mathbb{R}}^2$ per definitionem; weiterhin gilt

$$\begin{aligned} H(x, -\infty) &= C(F(x), G(-\infty)) = C(F(x), 0) = 0, \\ H(-\infty, y) &= C(F(-\infty), G(y)) = C(0, G(y)) = 0 \text{ und} \\ H(+\infty, +\infty) &= C(F(+\infty), G(+\infty)) = C(1, 1) = 1. \end{aligned}$$

Des weiteren haben wir

$$\begin{aligned} H(x, +\infty) &= C(F(x), G(+\infty)) = C(F(x), 1) = F(x) \text{ und} \\ H(+\infty, y) &= C(F(+\infty), G(y)) = C(1, G(y)) = G(y), \end{aligned}$$

so daß F und G die Randverteilungen von H sind. □

Dieses Resultat suggeriert uns, bei einem Copula von einer *Abhängigkeitsstruktur* zu sprechen. Gleichung (3.13) besagt also, daß das Copula C das Randverhalten, gegeben durch F und G , von der in der gemeinsamen Verteilungsfunktion H enthaltenen Abhängigkeit trennt.

Definition 3.11 (Quasi-Inverses) Sei F eine Verteilungsfunktion. Dann ist die Funktion $F^{(-1)}$ ein Quasi-Inverses von F mit Definitionsbereich $[0, 1]$, so daß gilt:

1. Falls $t \in \text{Ran } F$, dann ist $F^{(-1)}(t)$ irgendein $x \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $F(x) = t$, d. h., für alle $t \in \text{Ran } F$ gilt

$$F(F^{(-1)}(t)) = t,$$

2. falls $t \notin \text{Ran } F$, dann gilt

$$F^{(-1)}(t) = \inf\{x \mid F(x) \geq t\} = \sup\{x \mid F(x) \leq t\}.$$

Falls F streng monoton steigend, dann hat F nur ein einziges Quasi-Inverses, welches das gewöhnliche Inverse ist und üblicherweise mit F^{-1} bezeichnet wird.

Beispiel 3.7 Die Quasi-Inversen von ε_a sind folgende Funktionen:

$$\varepsilon_a^{(-1)}(t) = \begin{cases} a_0, & t = 0, \\ a, & t \in]0, 1[, \\ a_1, & t = 1, \end{cases}$$

wobei $a_0, a_1 \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $a_0 \leq a \leq a_1$.

Unter Verwendung von Quasi-Inversen der Verteilungsfunktionen erhalten wir direkt folgendes Korollar zu Lemma 3.9.

Korollar 3.12 Seien H, F, G und C' so gewählt wie in Lemma 3.9. Seien $F^{(-1)}$ und $G^{(-1)}$ die Quasi-Inversen von F und G . Dann gilt für $(u, v) \in \text{Dom } C'$ beliebig:

$$C'(u, v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)). \quad (3.14)$$

Beweis: Setze $F(x) = u$ und $G(y) = v$ in Lemma 3.9. □

Falls F und G stetig, dann gilt Korollar 3.12 für Copulas genauso. Dieses Resultat liefert eine Methode, Copulas aus gemeinsamen Verteilungsfunktionen zu konstruieren, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 3.8 Betrachte die gemeinsame Verteilungsfunktion H mit

$$H(x, y) = \begin{cases} \frac{(x+1)(e^y-1)}{x+2e^y-1}, & (x, y) \in [-1, 1] \times [0, \infty], \\ 1 - e^{-y}, & (x, y) \in]1, \infty] \times [0, \infty], \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Randverteilungen F und G , gegeben durch

$$F(x) = U_{-1,1}(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ (x+1)/2, & x \in [-1, 1], \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

und

$$G(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, \\ 1 - e^{-y}, & y \geq 0. \end{cases}$$

Quasi-Inverse von F und G sind gegeben durch $F^{(-1)}(u) = 2u - 1$ und $G^{(-1)}(v) = -\ln(1 - v)$ für $u, v \in [0, 1]$. Da $\text{Ran } F = \text{Ran } G = [0, 1]$, liefert (3.14) das Copula C , gegeben durch

$$C(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}, \quad (3.15)$$

denn

$$\begin{aligned} C(u, v) &= H(2u - 1, -\ln(1 - v)) \\ &= \frac{(2u - 1 + 1)(e^{-\ln(1-v)} - 1)}{2u - 1 + 2e^{-\ln(1-v)} - 1} \\ &\quad (\text{da } u, v \in [0, 1] \Rightarrow 2u - 1 \in [-1, 1], -\ln(1 - v) \in [0, \infty]) \\ &= \frac{2u\left(\frac{1}{1-v} - 1\right)}{2u - 2 + \frac{2}{1-v}} = \frac{\frac{2u-2u(1-v)}{1-v}}{\frac{(2u-2)(1-v)+2}{1-v}} \\ &= \frac{2u - 2u + 2uv}{2u - 2uv - 2 + 2v + 2} = \frac{uv}{u + v - uv}. \end{aligned}$$

Beispiel 3.9 Gesucht ist eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit standardnormalverteilten Rändern, welche aber **nicht** die gemeinsame Standardnormalverteilung sein soll. Nachdem wir nun den Satz von Sklar kennengelernt haben, ist die Lösung dieses Problems ein leichtes. Wir wählen einfach irgendein Copula und standardnormalverteilte Ränder in (3.13). Dann ist H die gesuchte Funktion.

Wir beenden diesen Unterabschnitt mit einer interessanten Schlußbeobachtung. Jedes Copula ist mit einer geeigneten Erweiterung des Definitionsbereichs auf $\overline{\mathbb{R}}^2$ eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen, die gleichverteilt auf $[0, 1]$ sind, d. h. U_{01} . Präzise ausgedrückt sei C ein Copula, und wir definieren die Funktion H_C auf $\overline{\mathbb{R}}^2$ durch

$$H_C(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ oder } y < 0, \\ C(x, y), & (x, y) \in [0, 1]^2, \\ x, & y > 1, x \in [0, 1], \\ y, & x > 1, y \in [0, 1], \\ 1, & x > 1 \text{ und } y > 1. \end{cases}$$

Dann ist H_C eine gemeinsame Verteilungsfunktion mit Randverteilungen U_{01} . Tatsächlich ist es oftmals nützlich, bei Copulas an gemeinsame Verteilungsfunktionen mit eingeschränktem Definitionsbereich $[0, 1]^2$ und U_{01} -Rändern zu denken.

3.4 Copulas und Zufallsvariablen

Wenn wir im Folgenden von Zufallsvariablen sprechen, dann sei immer ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und ein Meßraum (Ω', \mathfrak{A}') unterstellt, auf denen die Zufallsvariablen und deren Verteilungsfunktionen definiert sind. Wenn nicht anders erwähnt, dann sei $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\Omega', \mathfrak{A}') = (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ und die Verteilungsfunktion F der Zufallsvariablen $X: (\Omega, \mathfrak{A}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ gegeben durch $F(x) = P[X \leq x]$.

Wir sind nun in der Lage, den Satz von Sklar mit den Begriffen von Zufallsvariablen und deren Verteilungsfunktionen umzuformulieren.

Satz 3.13 (Satz von Sklar für Zufallsvariablen) *Seien X und Y Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F bzw. G und einer gemeinsamen Verteilungsfunktion H . Dann existiert ein Copula C , so daß (3.13) gilt. Falls F und G stetig, dann ist C eindeutig bestimmt. Anderenfalls ist C eindeutig auf $\text{Ran } F \times \text{Ran } G$ bestimmt.*

Das Copula C in Satz 3.13 wird *Copula von X und Y* genannt und mit C_{XY} bezeichnet, falls die Identifikation mit den Zufallsvariablen X und Y vorteilhaft erscheint.

Der folgende Satz zeigt, daß das Produkt-Copula $\Pi(u, v) = uv$ unabhängige Zufallsvariablen charakterisiert, falls die Verteilungsfunktionen stetig sind.

Satz 3.14 *Seien X und Y stetige Zufallsvariablen. X und Y sind dann und nur dann unabhängig, falls $C_{XY} = \Pi$.*

Beweis: Die Aussage folgt direkt aus Satz 3.13 und der Tatsache, daß zwei Zufallsvariablen X und Y genau dann unabhängig sind, falls $H(x, y) = F(x)G(y)$ für alle $(x, y) \in \overline{\mathbb{R}}^2$ (siehe [Bau91]). Wir erhalten:

$$C_{XY}(F(x), G(y)) = H(x, y) = F(x)G(y) = \Pi(F(x), G(y))$$

$$\Leftrightarrow X \text{ und } Y \text{ sind unabhängig.}$$

□

Falls wir nun streng monotone Transformationen von Zufallsvariablen betrachten, dann sind die zugehörigen Copulas entweder invariant oder vorhersehbare Transformationen. Falls die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen X stetig ist und α eine f. s. streng monotone Funktion, deren Definitionsbereich $\text{Ran } X$ enthält, dann ist bekannterweise auch die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $\alpha(X)$ stetig. Wir beginnen nun mit dem Fall von streng monoton steigenden Transformationen.

Satz 3.15 Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C_{XY} . Falls α und β f. s. streng monoton steigend auf $\text{Ran } X$ bzw. $\text{Ran } Y$, dann gilt $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$. Also ist C_{XY} invariant unter streng monoton steigenden Transformationen von X und Y .

Beweis: Seien F_1, G_1, F_2 und G_2 die Verteilungsfunktionen von $X, Y, \alpha(X)$ und $\beta(Y)$. Da α und β f. s. streng monoton steigend, gilt

$$\begin{aligned} F_2(x) &= \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x] = \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x)) \text{ und gleicherweise} \\ G_2(y) &= G_1(\beta^{-1}(y)). \end{aligned}$$

Somit gilt für $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ beliebig

$$\begin{aligned} C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) &= \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] = \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\ &= C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) = C_{XY}(F_2(x), G_2(y)). \end{aligned}$$

Da X und Y stetig, folgt $\text{Ran } F_2 = \text{Ran } G_2 = [0, 1]$. Daraus folgt wiederum, daß $C_{\alpha(X)\beta(Y)} = C_{XY}$ auf $[0, 1]^2$. \square

Falls nun α oder β oder beide f. s. streng monoton fallend, dann erhalten wir Resultate, bei denen das Copula der Zufallsvariablen $\alpha(X)$ und $\beta(Y)$ eine einfache Transformation des Copulas C_{XY} ist. Dies wird im folgenden Satz dargelegt.

Satz 3.16 Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C_{XY} . Die Funktionen α und β seien f. s. streng monoton auf $\text{Ran } X$ bzw. $\text{Ran } Y$. Dann gilt für alle $u, v \in [0, 1]$:

1. Falls α f. s. streng monoton steigend und β f. s. streng monoton fallend, dann gilt

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u - C_{XY}(u, 1 - v),$$

2. falls α f. s. streng monoton fallend und β f. s. streng monoton steigend, dann gilt

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v),$$

3. falls α und β f. s. streng monoton fallend, dann gilt

$$C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) = u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).$$

Beweis: Seien F_1, G_1, F_2 und G_2 die Verteilungsfunktionen von $X, Y, \alpha(X)$ und $\beta(Y)$. Da $\text{Ran } F_2 = \text{Ran } G_2 = [0, 1]$ gilt, existieren $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $u = F_2(x)$ und $v = G_2(y)$.

Zu 1:

$$\begin{aligned} u &= F_2(x) = \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x] = \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x)] = F_1(\alpha^{-1}(x)) \text{ und} \\ v &= G_2(y) = \mathbb{P}[\beta(Y) \leq y] = \mathbb{P}[Y > \beta^{-1}(y)] \\ &= 1 - \mathbb{P}[Y \leq \beta^{-1}(y)] = 1 - G_1(\beta^{-1}(y)) \\ &\Leftrightarrow G_1(\beta^{-1}(y)) = 1 - v. \end{aligned}$$

Somit gilt für alle $u, v \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) &= C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) = \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\
&= \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x), Y > \beta^{-1}(y)] \\
&= \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x)] - \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= u - C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
&= u - C_{XY}(u, 1 - v).
\end{aligned}$$

Zu 2: Analog.

Zu 3:

$$\begin{aligned}
u &= F_2(x) = 1 - F_1(\alpha^{-1}(x)) = 1 - \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x)] \text{ und} \\
v &= G_2(y) = 1 - G_1(\beta^{-1}(y)) = 1 - \mathbb{P}[Y \leq \beta^{-1}(y)].
\end{aligned}$$

Nun gilt für alle $u, v \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
C_{\alpha(X)\beta(Y)}(u, v) &= C_{\alpha(X)\beta(Y)}(F_2(x), G_2(y)) = \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x, \beta(Y) \leq y] \\
&= \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x, Y > \beta^{-1}(y)] \\
&= \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x] - \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x, Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x] - \mathbb{P}[X > \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= \mathbb{P}[\alpha(X) \leq x] - (\mathbb{P}[Y \leq \beta^{-1}(y)] - \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)]) \\
&= \mathbb{P}[X > \alpha^{-1}(x)] - \mathbb{P}[Y \leq \beta^{-1}(y)] + \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x), Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&= 1 - \mathbb{P}[X \leq \alpha^{-1}(x)] - \mathbb{P}[Y \leq \beta^{-1}(y)] \\
&\quad + C_{XY}(F_1(\alpha^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) \\
&= 1 - (1 - u) - (1 - v) + C_{XY}(1 - u, 1 - v) \\
&= u + v - 1 + C_{XY}(1 - u, 1 - v).
\end{aligned}$$

□

3.5 Copulas im n -Dimensionalen

In diesem Abschnitt werden wir die Ergebnisse der vorhergehenden Abschnitte auf den allgemeinen n -dimensionalen Fall erweitern. Um Unklarheiten zu vermeiden, werden wir die meisten Definitionen und Sätze in der mehrdimensionalen Variante wiederholen. Unter $\overline{\mathbb{R}}^n$ verstehen wir das kartesische Produkt $\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} \times \cdots \times \overline{\mathbb{R}}$, und für beliebige Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \overline{\mathbb{R}}^n$, d. h. $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, schreiben wir $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, falls $a_k \leq b_k$ für alle k , und $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, falls $a_k < b_k$ für alle k . Sei $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$, dann bezeichnen wir das kartesische Produkt von n abgeschlossenen Intervallen $B = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ als n -Box $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$. Die *Eckpunkte* einer n -Box sind die Punkte $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_n)$, wobei

jedes c_k entweder gleich einem a_k oder einem b_k ist. Eine reellwertige Funktion H von n Veränderlichen ist eine Funktion mit Definitionsbereich $\text{Dom } H \subseteq \overline{\mathbb{R}}^n$ und Bildbereich $\text{Ran } H \subseteq \mathbb{R}$.

Definition 3.12 (H -Volumen einer n -Box) Seien $S_1, \dots, S_n \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $S_1 \neq \emptyset, \dots, S_n \neq \emptyset$, H sei eine reellwertige Funktion von n Veränderlichen mit Definitionsbereich $\text{Dom } H = S_1 \times \dots \times S_n$. Sei $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ eine n -Box mit Eckpunkten in $\text{Dom } H$. Dann ist das H -Volumen von B gegeben durch

$$V_H(B) = \sum \text{sgn}(\mathbf{c})H(\mathbf{c}), \quad (3.16)$$

wobei die Summe über alle Eckpunkte \mathbf{c} von B genommen wird, und $\text{sgn}(\mathbf{c})$ ist gegeben durch

$$\text{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } c_k = a_k \text{ für eine gerade Anzahl der } k, \\ -1, & \text{falls } c_k = a_k \text{ für eine ungerade Anzahl der } k. \end{cases}$$

Bemerkung 3.3 Falls wir die n Differenzen 1. Ordnung von H bez. der n -Box $B = [\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ definieren durch

$$\Delta_{a_k}^{b_k} H(\mathbf{t}) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, b_k, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, a_k, t_{k+1}, \dots, t_n),$$

dann ist das H -Volumen von B gegeben durch die Differenz n -ter Ordnung von H bez. B ,

$$V_H(B) = \Delta_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} H(\mathbf{t}) = \Delta_{a_n}^{b_n} \Delta_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \Delta_{a_2}^{b_2} \Delta_{a_1}^{b_1} H(\mathbf{t}).$$

Definition 3.13 (n -dimensional steigend) Eine reellwertige Funktion H von n Veränderlichen heißt n -dimensional steigend, falls $V_H(B) \geq 0$ für alle n -Boxen B mit Eckpunkten in $\text{Dom } H$ gilt.

Definition 3.14 (geerdete Funktion) Sei H eine reellwertige Funktion von n Veränderlichen mit Definitionsbereich $\text{Dom } H = S_1 \times \dots \times S_n$. Jedes S_k habe ein kleinstes Element a_k . Wir sagen, H ist geerdet, falls $H(\mathbf{t}) = 0$ für alle $\mathbf{t} \in \text{Dom } H$ mit $t_k = a_k$ für mindestens ein k .

Definition 3.15 (Ränder) Sei H eine reellwertige Funktion von n Veränderlichen mit Definitionsbereich $\text{Dom } H = S_1 \times \dots \times S_n$. Jedes S_k habe ein größtes Element b_k . Dann sagen wir, die Funktion H hat Ränder. Die eindimensionalen Ränder von H sind die Funktionen H_k , gegeben durch $\text{Dom } H_k = S_k$ für $k = 1, \dots, n$ und

$$H_k(x) = H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) \text{ für alle } x \in S_k. \quad (3.17)$$

Ränder höherer Dimensionen sind dadurch definiert, indem wir weniger Stellen in H festhalten. Dazu betrachten wir das folgende Beispiel.

Beispiel 3.10 Wir betrachten die Funktion H mit $\text{Dom } H = [-1, 1] \times [0, \infty] \times [0, \pi/2]$, gegeben durch

$$H(x, y, z) = \frac{(x+1)(e^y - 1) \sin z}{x + 2e^y - 1}.$$

Dann ist H geerdet, da $H(x, y, 0) = 0$, $H(x, 0, z) = 0$ und $H(-1, y, z) = 0$. H hat die eindimensionalen Ränder $H_1(x)$, $H_2(y)$ und $H_3(z)$, gegeben durch

$$\begin{aligned} H_1(x) &= H(x, \infty, \pi/2) = (x+1)/2, \\ H_2(y) &= H(1, y, \pi/2) = 1 - e^{-y} \text{ und} \\ H_3(z) &= H(1, \infty, z) = \sin z, \end{aligned}$$

und H hat die 2-dimensionalen Ränder $H_{1,2}(x, y)$, $H_{1,3}(x, z)$ und $H_{2,3}(y, z)$, gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{1,2}(x, y) &= H(x, y, \pi/2) = \frac{(x+1)(e^y - 1)}{x + 2e^y - 1}, \\ H_{1,3}(x, z) &= H(x, \infty, z) = \frac{(x+1) \sin z}{2} \text{ und} \\ H_{2,3}(y, z) &= H(1, y, z) = (1 - e^{-y}) \sin z. \end{aligned}$$

Im Folgenden sagen wir anstelle von eindimensionalen Rändern kurz Ränder und anstelle von k -dimensionalen Rändern, $k \geq 2$, kurz k -Ränder.

Lemma 3.17 Seien $S_1, \dots, S_n \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $S_1 \neq \emptyset, \dots, S_n \neq \emptyset$, H eine geerdete n -dimensional steigende Funktion mit $\text{Dom } H = S_1 \times \dots \times S_n$. Dann ist H monoton steigend in jedem Argument, d. h. falls $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n), (t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \in \text{Dom } H$ und $x \leq y$, dann gilt $H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)$.

Beweis: Sei $B = [(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n), (t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)]$, wobei die a_i jeweils die kleinsten Elemente der S_i sind, d. h., alle Eckpunkte der n -Box B liegen in $\text{Dom } H$. Da H n -dimensional steigend ist, gilt $V_H(B) \geq 0$, und da H geerdet ist, vereinfacht sich (3.16) zu

$$V_H(B) = H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n).$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Um nun im n -dimensionalen Fall die gleichmäßige Stetigkeit von Copulas zu zeigen, benötigen wir ein n -dimensionales Analogon (Lemma 3.19) zu Lemma 3.3. Um Lemma 3.19 zu beweisen, stellen wir das folgende fundamentale Lemma 3.18 [SS83] voran.

Lemma 3.18 Seien $S_1, \dots, S_n \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $S_1 \neq \emptyset, \dots, S_n \neq \emptyset$, H eine geerdete n -dimensional steigende Funktion mit $\text{Dom } H = S_1 \times \dots \times S_n$ und Rändern H_k . Für beliebiges k , $1 \leq k \leq n$, seien $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n), (t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \in \text{Dom } H$ mit $x \leq y$. Dann gilt

$$H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H_k(y) - H_k(x). \quad (3.18)$$

Beweis: Seien die a_i und b_i die kleinsten bzw. größten Elemente der S_i , $1 \leq i \leq n$. Im Falle $n = 2$, da H 2-dimensional steigend ist, liefert (3.1) mit $B = [x, y] \times [t_2, b_2]$ bzw. $B = [t_1, b_1] \times [x, y]$ das Folgende:

$$\begin{aligned} & H(y, b_2) - H(x, b_2) - H(y, t_2) + H(x, t_2) \geq 0 \text{ bzw.} \\ & H(b_1, y) - H(b_1, x) - H(t_1, y) + H(t_1, x) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & H_1(y) - H_1(x) \geq H(y, t_2) - H(x, t_2) \text{ bzw.} \\ & H_2(y) - H_2(x) \geq H(t_1, y) - H(t_1, x) \\ \Leftrightarrow & (3.18). \end{aligned}$$

Falls $n > 2$, definieren wir n -Boxen B_1, B_2, \dots, B_{n-1} folgenderweise:

$$\begin{aligned} B_1 &= [(t_1, a_2, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n), (b_1, t_2, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)], \\ B_2 &= [(a_1, t_2, a_3, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n), (b_1, b_2, t_3, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)], \\ &\vdots \\ B_{n-1} &= [(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_{n-1}, t_n), (b_1, \dots, b_{k-1}, y, b_{k+1}, \dots, b_n)]. \end{aligned}$$

Da H n -dimensional steigend ist und alle Eckpunkte der n -Boxen B_1, B_2, \dots, B_{n-1} in $\text{Dom } H$ liegen, gilt $V_H(B_j) \geq 0$ für alle j . Somit folgt

$$\sum_{j=1}^{n-1} V_H(B_j) \geq 0. \quad (3.19)$$

Da H geerdet ist, vereinfacht sich (3.16) für jedes $V_H(B_j)$ in die folgenden Summen von 4 Termen:

$$\begin{aligned} V_H(B_1) &= H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &\quad - H(b_1, t_2, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) + H(b_1, t_2, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ V_H(B_2) &= H(b_1, t_2, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(b_1, t_2, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &\quad - H(b_1, b_2, t_3, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) + H(b_1, b_2, t_3, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ V_H(B_3) &= H(b_1, b_2, t_3, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(b_1, b_2, t_3, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &\quad - H(b_1, b_2, b_3, t_4, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &\quad + H(b_1, b_2, b_3, t_4, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &\vdots \\ V_H(B_{n-1}) &= H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_{n-1}, t_n) - H(b_1, \dots, b_{k-1}, y, b_{k+1}, \dots, b_{n-1}, t_n) \\ &\quad - H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) + H(b_1, \dots, b_{k-1}, y, b_{k+1}, \dots, b_n). \end{aligned}$$

Wie wir nun leicht erkennen können, handelt es sich bei (3.19) um eine Teleskopsumme, welche sich wie folgt vereinfacht:

$$\begin{aligned} & H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ & + H(b_1, \dots, b_{k-1}, y, b_{k+1}, \dots, b_n) - H(b_1, \dots, b_{k-1}, x, b_{k+1}, \dots, b_n) \geq 0 \\ \Leftrightarrow & H_k(y) - H_k(x) \geq H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. \square

Lemma 3.19 Seien $S_1, \dots, S_n \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $S_1 \neq \emptyset, \dots, S_n \neq \emptyset$, H eine geordnete n -dimensional steigende Funktion mit $\text{Dom } H = S_1 \times \dots \times S_n$ und Rändern H_k . Seien $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \text{Dom } H$ beliebig. Dann gilt

$$|H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y})| \leq \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|. \quad (3.20)$$

Beweis: Vermöge Lemma 3.17, dann ist (3.18) äquivalent zu

$$\begin{aligned} & |H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) - H(t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n)| \\ & \leq |H_k(x) - H_k(y)| \end{aligned} \quad (3.21)$$

für alle $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n), (t_1, \dots, t_{k-1}, y, t_{k+1}, \dots, t_n) \in \text{Dom } H$. Durch n -maliges Anwenden von (3.21) und der Dreiecksungleichung, erhalten wir sukzessive die Behauptung auf folgende Weise:

$$\begin{aligned} & |H(x_1, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \\ & \leq |H(x_1, \dots, x_n) - H(y_1, x_2, \dots, x_n)| + |H(y_1, x_2, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \\ & \leq |H_1(x_1) - H_1(y_1)| \\ & + |H(y_1, x_2, \dots, x_n) - H(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n)| + |H(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \\ & \leq |H_1(x_1) - H_1(y_1)| + |H_2(x_2) - H_2(y_2)| \\ & + |H(y_1, y_2, x_3, \dots, x_n) - H(y_1, y_2, y_3, x_4, \dots, x_n)| + \dots \\ & \leq \dots \\ & \vdots \\ & \leq |H_1(x_1) - H_1(y_1)| + \dots + |H_{n-1}(x_{n-1}) - H_{n-1}(y_{n-1})| \\ & + |H(y_1, \dots, y_{n-1}, x_n) - H(y_1, \dots, y_n)| \\ & \leq |H_1(x_1) - H_1(y_1)| + \dots + |H_n(x_n) - H_n(y_n)| = \sum_{k=1}^n |H_k(x_k) - H_k(y_k)|. \end{aligned}$$

\square

Die Lemmata 3.17 und 3.19 liefern direkt das folgende Korollar.

Korollar 3.20 Seien $S_1, \dots, S_n \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $S_1 \neq \emptyset, \dots, S_n \neq \emptyset$, H eine geordnete n -dimensional steigende Funktion mit $\text{Dom } H = S_1 \times \dots \times S_n$ und Rändern H_k . Dann sind alle Ränder H_k monoton steigend, und für beliebiges $(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \in \text{Dom } H$ gilt

$$0 \leq H(t_1, \dots, t_{k-1}, x, t_{k+1}, \dots, t_n) \leq H_k(x). \quad (3.22)$$

Eine entsprechende Aussage gilt für höherdimensionale Ränder.

Wir sind nun in der Lage, n -dimensionale Subcopulas und Copulas zu definieren.

Definition 3.16 (n -Subcopula) *Ein n -dimensionales Subcopula (im Folgenden kurz n -Subcopula) ist eine Funktion C' mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $\text{Dom } C' = S_1 \times \cdots \times S_n$, wobei $S_k \subseteq [0, 1]$ und $\{0, 1\} \subseteq S_k$ für $k = 1, \dots, n$,
2. C' ist geerdet und n -dimensional steigend,
3. C' hat Ränder C'_k , $k = 1, \dots, n$, für die das Folgende gilt:

$$C'_k(u) = u \text{ für alle } u \in S_k. \quad (3.23)$$

Wir beachten, daß für alle $\mathbf{u} \in \text{Dom } C'$ die Beziehung $0 \leq C'(\mathbf{u}) \leq 1$ gilt, so daß $\text{Ran } C'$ auch eine Teilmenge von $[0, 1]$ ist.

Definition 3.17 (n -Copula) *Ein n -dimensionales Copula (im Folgenden kurz n -Copula) ist ein n -Subcopula mit Definitionsbereich $[0, 1]^n$. Ein n -Copula ist also eine Funktion $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. Für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ gilt

$$C(\mathbf{u}) = 0, \text{ falls mindestens eine Komponente von } \mathbf{u} \text{ gleich } 0 \text{ ist,} \quad (3.24)$$

und

$$C(\mathbf{u}) = u_k, \text{ falls alle Komponenten von } \mathbf{u} \text{ gleich } 1 \text{ sind außer } u_k \text{ selbst,} \quad (3.25)$$

2. für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0, 1]^n$ mit $\mathbf{u} \leq \mathbf{v}$ gilt

$$V_C([\mathbf{u}, \mathbf{v}]) \geq 0. \quad (3.26)$$

Bemerkung 3.4 Es ist sehr leicht ersichtlich, daß für ein beliebiges n -Copula C , $n \geq 3$, jeder der k -Ränder von C ein k -Copula ist, $2 \leq k < n$.

Der folgende Satz begründet die Stetigkeit von n -Subcopulas, und somit für n -Copulas, durch eine Lipschitz-Bedingung auf $[0, 1]^n$.

Satz 3.21 *Sei C' ein n -Subcopula. Dann gilt für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Dom } C'$*

$$|C'(\mathbf{v}) - C'(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|. \quad (3.27)$$

Somit ist C' gleichmäßig stetig auf seinem Definitionsbereich.

Beweis: Mit (3.20) und (3.23) erhalten wir

$$|C'(\mathbf{v}) - C'(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^n |C'_k(v_k) - C'_k(u_k)| = \sum_{k=1}^n |v_k - u_k|.$$

□

Definition 3.18 (*n*-dimensionale Verteilungsfunktion) Eine *n*-dimensionale Verteilungsfunktion ist eine Funktion H mit Definitionsbereich $\overline{\mathbb{R}}^n$, so daß gilt:

1. H ist geerdet und *n*-dimensional steigend,
2. $H(\infty, \dots, \infty) = 1$.

Eine *gemeinsame Verteilungsfunktion* ist demzufolge eine Funktion H , für die ein $n \geq 2$ existiert, so daß H eine *n*-dimensionale Verteilungsfunktion ist.

Aus Lemma 3.17 folgt, daß die Ränder einer *n*-dimensionalen Verteilungsfunktion wieder Verteilungsfunktionen sind, siehe Definition 3.9. Für $n \geq 3$ bezeichnen wir diese Randverteilungen mit F_1, \dots, F_n .

Satz 3.22 (Satz von Sklar im *n*-Dimensionalen) Sei H eine *n*-dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n . Dann existiert ein *n*-Copula C , so daß für alle $\mathbf{x} \in \overline{\mathbb{R}}^n$ gilt:

$$H(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \quad (3.28)$$

Falls die Randverteilungen F_1, \dots, F_n stetig sind, dann ist C eindeutig bestimmt. Andernfalls ist C eindeutig auf $\text{Ran } F_1 \times \dots \times \text{Ran } F_n$ bestimmt. Umgekehrt gilt: Falls C ein *n*-Copula ist und F_1, \dots, F_n Verteilungsfunktionen sind, dann ist die in (3.28) definierte Funktion H eine *n*-dimensionale Verteilungsfunktion mit Randverteilungen F_1, \dots, F_n .

Der Beweis vollzieht sich genauso wie im 2-dimensionalen Fall. Man zeigt zunächst die *n*-dimensionale Variante von Lemma 3.9, siehe dazu [SS83], und dann die *n*-dimensionale Variante des Fortsetzungslemmas 3.10 mittels einer *multilinearen Interpolation*. Eine Beweisskizze findet sich in [SS83], und in [Nel99] wird u. a. auf [MS75, Skl96] verwiesen.

Korollar 3.23 Sei H eine *n*-dimensionale Verteilungsfunktion mit stetigen Randverteilungen F_1, \dots, F_n und *n*-Copula C , welches (3.28) genügt. Seien $F_1^{(-1)}, \dots, F_n^{(-1)}$ die Quasi-Inversen von F_1, \dots, F_n . Dann gilt für alle $\mathbf{u} \in \text{Dom } C = [0, 1]^n$

$$C(u_1, \dots, u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), \dots, F_n^{(-1)}(u_n)). \quad (3.29)$$

Beweis: Setze $F_1(x_1) = u_1, \dots, F_n(x_n) = u_n$ in (3.28). □

Die folgende n -dimensionale Variante des Satzes von Sklar für Zufallsvariablen² ist identisch zu Satz 3.13.

Satz 3.24 *Seien X_1, \dots, X_n Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktionen F_1, \dots, F_n und einer gemeinsamen Verteilungsfunktion H . Dann existiert ein n -Copula C , so daß (3.28) gilt. Falls die F_1, \dots, F_n stetig sind, dann ist C eindeutig bestimmt. Anderenfalls ist C eindeutig auf $\text{Ran } F_1 \times \dots \times \text{Ran } F_n$ bestimmt.*

Die Fréchet-Hoeffding-Schranken M und W sowie das Produkt-Copula Π lassen sich natürlich auch aufs n -Dimensionale erweitern. Sie werden mit M^n , W^n und Π^n bezeichnet und sind gegeben durch

$$\begin{aligned} M^n(\mathbf{u}) &= \min(u_1, \dots, u_n), \\ W^n(\mathbf{u}) &= \max(u_1 + \dots + u_n - n + 1, 0) \text{ und} \\ \Pi^n(\mathbf{u}) &= u_1 \cdots u_n. \end{aligned}$$

Obwohl die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W^n für $n \geq 3$ kein n -Copula ist (siehe Bemerkung 3.2), gilt die Fréchet-Hoeffding-Schranken-Ungleichung (3.7) im n -Dimensionalen gleichermaßen.

Satz 3.25 *Sei C ein n -Copula, dann gilt für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$*

$$W^n(\mathbf{u}) \leq C(\mathbf{u}) \leq M^n(\mathbf{u}). \quad (3.30)$$

Beweis: Aus (3.22) und (3.23) folgt

$$\begin{aligned} C(\mathbf{u}) &\leq u_1, \dots, C(\mathbf{u}) \leq u_n \\ \Leftrightarrow C(\mathbf{u}) &\leq \min(u_1, \dots, u_n) = M^n(\mathbf{u}), \end{aligned}$$

womit die rechte Seite der Behauptung gezeigt ist. Und mit (3.20) erhalten wir

$$\begin{aligned} |W^n(1, \dots, 1) - C(u_1, \dots, u_n)| &\leq \sum_{k=1}^n |1 - u_k| \\ \Leftrightarrow |1 - C(u_1, \dots, u_n)| &\leq \sum_{k=1}^n |1 - u_k| \\ \Leftrightarrow 1 - C(u_1, \dots, u_n) &\leq \sum_{k=1}^n 1 - u_k \\ \Leftrightarrow 1 - C(u_1, \dots, u_n) &\leq n - u_1 - \dots - u_n \\ \Leftrightarrow u_1 + \dots + u_n - n + 1 &\leq C(u_1, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Kombinieren wir dies mit $C(\mathbf{u}) \geq 0$, so erhalten wir die linke Seite der Behauptung. \square

²Diese sind wieder auf einem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum definiert. Im Folgenden sei dies immer unterstellt, wenn wir von Zufallsvariablen sprechen, auch wenn es nicht immer ausdrücklich erwähnt wird.

Obleich die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W^n für $n \geq 3$ kein n -Copula ist, so ist sie doch die bestmögliche untere Schranke in dem folgenden Sinne.

Satz 3.26 *Seien $n \geq 3$ und $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ beliebig, dann existiert ein n -Copula C , abhängig von \mathbf{u} , so daß gilt:*

$$C(\mathbf{u}) = W^n(\mathbf{u}).$$

Für den Beweis siehe [Nel99].

Die Unabhängigkeit von n stetigen Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n wird durch das folgende n -dimensionale Analogon zu Satz 3.14 charakterisiert.

Satz 3.27 *Seien X_1, \dots, X_n stetige Zufallsvariablen. X_1, \dots, X_n sind dann und nur dann unabhängig, falls das n -Copula C von X_1, \dots, X_n durch $C = \Pi^n$ gegeben ist.*

Als *survival function* (auch Zuverlässigkeitsfunktion oder Überlebensfunktion) einer Zufallsvariablen X bezeichnen wir die Funktion $\overline{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x)$, wobei F natürlich die Verteilungsfunktion von X ist. Die *gemeinsame survival function* \overline{H} zweier Zufallsvariablen X und Y mit Verteilungsfunktionen F und G ist gegeben durch $\overline{H}(x, y) = P[X > x, Y > y]$. Sei nun C das Copula von X und Y , dann erhalten wir die folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \overline{H}(x, y) &= 1 - F(x) - G(y) + H(x, y) = \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(1 - \overline{F}(x), 1 - \overline{G}(y)). \end{aligned}$$

Die Ränder von \overline{H} sind die eindimensionalen survival functions, d. h. $\overline{H}(x, -\infty) = \overline{F}(x)$ und $\overline{H}(-\infty, y) = \overline{G}(y)$. Falls wir nun eine Funktion $\widehat{C}: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ definieren durch

$$\widehat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v), \quad (3.31)$$

so erhalten wir

$$\overline{H}(x, y) = \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)). \quad (3.32)$$

\widehat{C} bezeichnen wir als *survival copula*³ von C bzw. von X und Y .

\widehat{C} sollte allerdings **nicht** mit der gemeinsamen survival function \overline{C} von zwei U_{01} -verteilten Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilungsfunktion durch das Copula C gegeben ist, verwechselt werden. Es gilt nämlich

$$\overline{C}(u, v) = P[U > u, V > v] = 1 - u - v + C(u, v) = \widehat{C}(1 - u, 1 - v).$$

Das *survival n -copula* (oder *n -variates survival copula*) von X_1, \dots, X_n ist gegeben durch

$$\overline{H}(x_1, \dots, x_n) = P[X_1 > x_1, \dots, X_n > x_n] = \widehat{C}(\overline{F}_1(x_1), \dots, \overline{F}_n(x_n)). \quad (3.33)$$

³Es ist sehr leicht nachzuprüfen, daß \widehat{C} wirklich ein Copula ist, siehe dazu auch Punkt 3 in Satz 3.16, hier ist $C_{\alpha(X)\beta(Y)}$ das survival copula \widehat{C} von X und Y .

In (3.33) erkennen wir nun sehr gut die Analogie zu (3.28). Während in (3.28) das Copula C das Randverhalten, gegeben durch F_1, \dots, F_n , von der in der gemeinsamen Verteilungsfunktion H enthaltenen Abhängigkeit trennt, wird in (3.33) das Randverhalten der survival functions $\overline{F}_1, \dots, \overline{F}_n$ von der in der gemeinsamen survival function \overline{H} enthaltenen Abhängigkeit durch das survival n -Copula \widehat{C} getrennt. Für die Herleitung von (3.33) siehe [Sch03].

Die Sätze 3.15 und 3.16 gelten im n -Dimensionalen gleichermaßen.

Satz 3.28 *Seien X_1, \dots, X_n stetige Zufallsvariablen mit n -Copula C_{X_1, \dots, X_n} . Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ f. s. streng monoton steigend auf $\text{Ran } X_1, \dots, \text{Ran } X_n$, dann gilt*

$$C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)} = C_{X_1, \dots, X_n}.$$

Somit ist C_{X_1, \dots, X_n} invariant unter streng monoton steigenden Transformationen von X_1, \dots, X_n .

Satz 3.29 *Seien X_1, \dots, X_n stetige Zufallsvariablen mit n -Copula C_{X_1, \dots, X_n} . Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ f. s. streng monoton auf $\text{Ran } X_1, \dots, \text{Ran } X_n$, und sei $C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}$ das n -Copula von $\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)$. Ferner sei α_k f. s. streng monoton fallend für ein $k \in \{1, \dots, n\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $k = 1$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}(u_1, \dots, u_n) &= C_{\alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(u_2, \dots, u_n) \\ &\quad - C_{X_1, \alpha_2(X_2), \dots, \alpha_n(X_n)}(1 - u_1, u_2, \dots, u_n). \end{aligned}$$

Das n -Copula $C_{\alpha_1(X_1), \dots, \alpha_n(X_n)}$ kann also durch Terme des n -Copulas C_{X_1, \dots, X_n} und dessen kleinerdimensionalen Rändern ausgedrückt werden. Die Beweise der Sätze 3.28 und 3.29 funktionieren genauso wie im 2-Dimensionalen und sind in [ELM01] zu finden.

Wie wir bereits wissen, können wir bei n -Copulas an gemeinsame Verteilungsfunktionen mit eingeschränktem Definitionsbereich $[0, 1]^n$ und U_{01} -Rändern denken. Aus diesem Grunde induziert jedes n -Copula C ein eindeutiges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $([0, 1]^n, \mathcal{B}([0, 1]^n))$ durch $V_C([\mathbf{0}, \mathbf{u}]) = C(\mathbf{u})$ mit $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$, $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in [0, 1]^n$ und eine Standarderweiterung auf beliebige (nicht notwendigerweise n -Boxen) Borel-Mengen aus $\mathcal{B}([0, 1]^n)$. Jedoch wird **nicht** jedes Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $([0, 1]^n, \mathcal{B}([0, 1]^n))$ durch ein Copula C induziert, d. h., es existiert nicht immer ein n -Copula C , so daß $P([\mathbf{0}, \mathbf{u}]) = C(\mathbf{u})$ für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ gilt. Damit ein Wahrscheinlichkeitsmaß durch ein Copula induziert werden kann, muß es seine Masse in einer Art und Weise verteilen, die konsistent zu den Randbedingungen eines Copulas ist. Das bedeutet also, daß ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $([0, 1]^n, \mathcal{B}([0, 1]^n))$ mit mindestens einem nicht U_{01} -verteilten Rand niemals durch ein Copula induziert werden kann. Äquivalenz liegt also nur in einem Spezialfall vor, der im folgenden Satz (vgl. [Sch03]) dargelegt wird.

Satz 3.30 *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $([0, 1]^n, \mathcal{B}([0, 1]^n))$ wird dann und nur dann durch ein n -Copula C induziert, falls $P([\mathbf{0}, \mathbf{x}_i]) = x_i$ für alle $x_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq n$, wobei $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ und $\mathbf{x}_i = (1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1)$.*

Beweis:

„ \Rightarrow “: Falls P durch ein n -Copula C induziert wird, dann gilt mit (3.25) $P([\mathbf{0}, \mathbf{x}_i]) = C(1, \dots, 1, x_i, 1, \dots, 1) = x_i$ für alle $x_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq n$.

„ \Leftarrow “: Sei nun $P([\mathbf{0}, \mathbf{x}_i]) = x_i$ für alle $x_i \in [0, 1]$, $1 \leq i \leq n$, vorausgesetzt. Dann definieren wir das n -Copula C durch $C(\mathbf{u}) := P([\mathbf{0}, \mathbf{u}])$, $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$. Dann gelten (3.24)–(3.26) in Definition 3.17.

□

Bevor wir dieses Kapitel beenden, führen wir noch den Begriff der *Konkordanz-Ordnung*⁴ ein. Diese wird in Kapitel 4 wichtig, wenn wir die Beziehungen zwischen Copulas und den Abhängigkeitseigenschaften von Zufallsvariablen untersuchen werden.

Definition 3.19 (Konkordanz-Ordnung) *Seien C_1 und C_2 n -Copulas. Wir sagen, C_1 ist kleiner als C_2 (oder C_2 ist größer als C_1), geschrieben $C_1 \prec C_2$ (oder $C_2 \succ C_1$), falls*

$$C_1(\mathbf{u}) \leq C_2(\mathbf{u}) \text{ und } \bar{C}_1(\mathbf{u}) \leq \bar{C}_2(\mathbf{u})$$

für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ gilt.

Es handelt sich hierbei allerdings nicht um eine totale Ordnung, da sich nicht jedes Paar von Copulas bez. dieser Ordnung vergleichen läßt.

⁴Der Grund für die Namensgebung der Ordnung wird in Kapitel 4 ersichtlich.

4 Abhängigkeit

In diesem Kapitel werden wir einige Möglichkeiten vorstellen, Abhängigkeiten von Zufallsvariablen zu messen. In der Praxis wird am häufigsten die lineare Korrelation als Maß der Abhängigkeit benutzt. Diese sollte allerdings nicht als kanonisches Maß der Abhängigkeit verstanden werden, sondern vielmehr als eines unter vielen. Denn die lineare Korrelation weist einige Nachteile auf, z. B. setzt sie immer endliche Varianzen voraus, um definiert zu sein.¹ Dies ist aber nicht immer gegeben. Dennoch werden wir uns zunächst einige grundlegende Eigenschaften der linearen Korrelation in Erinnerung rufen und uns anschließend mit Copula-basierten Maßen der Abhängigkeit beschäftigen. Auch in diesem Kapitel sei immer ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ unterstellt, wenn wir von Zufallsvariablen sprechen.

4.1 Lineare Korrelation

Definition 4.1 (Korrelationskoeffizient) *Seien X und Y Zufallsvariablen mit endlichen Varianzen $\sigma_X^2, \sigma_Y^2 > 0$. Dann ist der Korrelationskoeffizient von X und Y definiert durch*

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\sigma_X^2 \sigma_Y^2}},$$

wobei $\text{Cov}(X, Y)$ die Kovarianz von X und Y ist.

Die lineare Korrelation ist ein Maß für die affin-lineare Abhängigkeit. Im Falle von unabhängigen Zufallsvariablen X und Y gilt $\rho(X, Y) = 0$, da $\text{Cov}(X, Y) = 0$. Im Falle perfekter linearer Abhängigkeit, d. h. $Y = aX + b$ f. s. oder $P[Y = aX + b] = 1$ für $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, gilt $\rho(X, Y) = \pm 1$. Im Falle nichtperfekter linearer Abhängigkeit gilt $-1 < \rho(X, Y) < 1$. Ferner erfüllt die Korrelation die Linearitätseigenschaft

$$\rho(\alpha X + \beta, \gamma Y + \delta) = \text{sgn}(\alpha\gamma)\rho(X, Y),$$

mit $\alpha, \gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta, \delta \in \mathbb{R}$. Somit ist die Korrelation invariant unter positiven affinen Transformationen, d. h. streng monoton steigenden *linearen* Transformationen.

Die Verallgemeinerung der Korrelation auf mehrere Zufallsvariablen ist zudem sehr leicht. Wir betrachten die Zufallsvektoren $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ und $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$. Dann

¹Eine ausführlichere Auseinandersetzung mit den Nachteilen der linearen Korrelation findet sich in [EMS02].

können wir alle paarweisen Kovarianzen und Korrelationskoeffizienten in $n \times n$ -Matrizen $\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ und $\rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ zusammenfassen. Soweit die entsprechenden Varianzen endlich sind, definieren wir

$$\begin{aligned}\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{i,j} &:= \text{Cov}(X_i, Y_j) \text{ und} \\ \rho(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{i,j} &:= \rho(X_i, Y_j) \text{ für } 1 \leq i, j \leq n.\end{aligned}$$

Bekannterweise sind diese Matrizen symmetrisch und positiv semidefinit. Oftmals interessieren wir uns nur für die paarweisen Korrelationen zwischen den Komponenten eines einzigen Zufallsvektors \mathbf{X} . In diesem Falle setzen wir $\mathbf{Y} = \mathbf{X}$ und betrachten $\rho(\mathbf{X}) := \rho(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ oder $\text{Cov}(\mathbf{X}) := \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.

Außerdem kann die lineare Korrelation unter Linearoperationen leicht manipuliert werden. Wir betrachten die affin-linearen Transformationen $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Ax + a$ und $B: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x \mapsto Bx + b$ mit $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $a, b \in \mathbb{R}^m$. Seien $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ und $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)$ Zufallsvektoren, dann erhalten wir

$$\text{Cov}(A\mathbf{X} + a, B\mathbf{Y} + b) = A \text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) B^t.$$

Als Spezialfall erhalten wir die folgende elegante Beziehung zwischen Varianzen und Kovarianzen eines Zufallsvektors \mathbf{X} . Für jede Linearkombination $\alpha^t \mathbf{X}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\sigma_{\alpha^t \mathbf{X}}^2 = \alpha^t \text{Cov}(\mathbf{X}) \alpha.$$

Somit ist die Varianz einer beliebigen Linearkombination vollständig durch die paarweisen Kovarianzen zwischen den einzelnen Komponenten bestimmt. Diese Tatsache wird gewöhnlich in der Portefeuille-Theorie ausgenutzt.

4.2 Komonotonie

Wie wir schon in Kapitel 3 kennengelernt haben, gilt für jedes n -Copula die Fréchet-Hoeffding-Schranken-Ungleichung

$$W^n(\mathbf{x}) \leq C(\mathbf{x}) \leq M^n(\mathbf{x}).$$

Im Falle $n = 2$ wissen wir zudem, daß die beiden Schranken W und M selbst wieder Copulas sind. Ferner sind W und M die 2-dimensionalen Verteilungsfunktionen der Zufallsvektoren $(X, 1 - X)$ bzw. (X, X) , wobei $X \sim U_{01}$, denn es gilt

$$W(x_1, x_2) = \text{P}[X \leq x_1, 1 - X \leq x_2] \text{ und } M(x_1, x_2) = \text{P}[X \leq x_1, X \leq x_2].$$

Wir sagen in diesem Falle, daß W *perfekte negative Abhängigkeit* und M *perfekte positive Abhängigkeit* beschreibt. Dies wird im folgenden Satz, der aus [EMS02] und [WD98] hervorgeht, formalisiert.

Satz 4.1 Sei (X, Y) ein Zufallsvektor, dann gelten die folgenden Aussagen:

1. W ist das Copula von $(X, Y) \Leftrightarrow$
es existieren zwei monotone Funktionen $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable Z ,
so daß gilt:

$$(X, Y) =_d (\alpha(Z), \beta(Z)),^2$$

wobei α monoton steigend und β monoton fallend ist.

2. M ist das Copula von $(X, Y) \Leftrightarrow$
es existieren zwei monotone Funktionen $\alpha, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und eine Zufallsvariable Z ,
so daß gilt:

$$(X, Y) =_d (\alpha(Z), \beta(Z)),$$

wobei α und β monoton steigend sind.

Beweis:

Zu 1: „ \Rightarrow “: Sei W das Copula von (X, Y) , d. h. mit (3.13) gilt $H(x, y) = \max(F(x) + G(y) - 1, 0)$, wobei H, F und G so wie in Satz 3.13 gewählt sind.³ Für $q \in [0, 1]$ und $x \geq 0$ gilt $F^{(-1)}(q) \leq x \Leftrightarrow q \leq F(x)$, für Y in gleicher Weise. Sei nun U eine U_{01} -verteilte Zufallsvariable. Benutzen wir nun die obige Äquivalenzrelation, so erhalten wir

$$(X, Y) =_d (F^{(-1)}(U), G^{(-1)}(1 - U)) = (F^{(-1)}(U), G^{(-1)} \circ g(U)) \text{ mit } g(x) = 1 - x.$$

Somit folgt, daß $\alpha := F^{(-1)}$ monoton steigend und $\beta := G^{(-1)} \circ g$ monoton fallend ist.

„ \Leftarrow “: Nun sei $(X, Y) =_d (\alpha(Z), \beta(Z))$ mit α monoton steigend und β monoton fallend vorausgesetzt. Wir definieren uns die Mengen

$$A' := \{Z \in A\} \text{ mit } A := \alpha^{-1}(]-\infty, x]) \text{ und} \\ B' := \{Z \in B\} \text{ mit } B := \beta^{-1}(]-\infty, y]).$$

Falls $A' \cap B' \neq \emptyset$, dann impliziert die Wahl von α als monoton steigend und β als monoton fallend das Folgende:

$$P[A' \cup B'] = P[\Omega] = 1 = P[A'] + P[B'] - P[A' \cap B'].$$

Somit gilt $P[A' \cap B'] = P[\alpha(Z) \leq x, \beta(Z) \leq y] = F(x) + G(y) - 1$. Falls $A' \cap B' = \emptyset$, dann gilt $F(x) + G(y) - 1 \leq 0$. Zusammengefaßt erhalten wir also

$$H(x, y) = P[\alpha(Z) \leq x, \beta(Z) \leq y] = \max(F(x) + G(y) - 1, 0).$$

²Hierbei benutzen wir $=_d$, um Gleichheit in Verteilung auszudrücken.

³Sollten F oder G nicht stetig sein, so daß das Copula nicht eindeutig bestimmt ist, dann interpretieren wir W als mögliches Copula. Gleiches gilt für M .

Zu 2: „ \Rightarrow “: Sei nun M das Copula von (X, Y) , d.h. mit den gleichen Bedingungen wie oben gilt $H(x, y) = \min(F(x), G(y))$. Sei U wieder eine U_{01} -verteilte Zufallsvariable. Benutzen wir nochmals die obige Äquivalenzrelation, so erhalten wir $(X, Y) =_d (F^{(-1)}(U), G^{(-1)}(U))$. Somit sind $\alpha := F^{(-1)}$ und $\beta := G^{(-1)}$ monoton steigend.

„ \Leftarrow “: Sei $(X, Y) =_d (\alpha(Z), \beta(Z))$ mit α und β monoton steigend vorausgesetzt. Die Mengen A und B seien wie oben gewählt. Da nun α und β monoton steigend sind, gilt entweder $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} H(x, y) &= P[\alpha(Z) \leq x, \beta(Z) \leq y] = P[Z \in A, Z \in B] = \min(P[Z \in A], P[Z \in B]) \\ &= \min(P[\alpha(Z) \leq x], P[\beta(Z) \leq y]) = \min(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. □

Definition 4.2 (komonoton und antimonoton) *Wir sagen, die Zufallsvariablen X und Y sind komonoton (englisch: comonotonic), falls M das Copula von (X, Y) ist. X und Y sind antimonoton (englisch: countermonotonic), falls W das Copula von (X, Y) ist.*

Sollten F oder G Unstetigkeiten aufweisen, vgl. Fußnote 3, so bezeichnen wir wiederum M und W als mögliche Copulas. Sollten jedoch F und G stetig sein, dann können wir die folgenden stärkeren Beziehungen dieses Ergebnisses erklären:

$$\begin{aligned} C = W &\Leftrightarrow Y = T(X) \text{ f. s. mit } T = G^{(-1)} \circ (1 - F) \text{ monoton fallend, und} \\ C = M &\Leftrightarrow Y = T(X) \text{ f. s. mit } T = G^{(-1)} \circ F \text{ monoton steigend.} \end{aligned}$$

Während also die Korrelation die lineare Abhängigkeit der Zufallsvariablen beschreibt, haben wir hier die Möglichkeit, beliebige monotone Relationen zwischen den Zufallsvariablen zu betrachten. Die Komonotonie kann daher als Erweiterung des Korrelationskonzeptes angesehen werden. Aus finanzwirtschaftlicher Sicht bedeutet also Komonotonie, daß sich zwei Risiken (die Zufallsvariablen), die komonoton sind, nicht gegenseitig kompensieren können.

4.3 Konkordanz

Im Folgenden benötigen wir den Begriff der *Konkordanz*. Intuitiv ist ein Paar von Zufallsvariablen X und Y *konkordant*, falls „große“ Werte von X mit „großen“ Werten von Y und „kleine“ Werte von X mit „kleinen“ Werten von Y assoziiert werden. Wir interessieren uns also dafür, ob die Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen X und Y positiv oder negativ ist. Diese Beziehung werden wir in der folgenden Definition formalisieren.

Definition 4.3 (konkordant und diskordant) Sei (X, Y) ein Zufallsvektor, und seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ zwei Realisationen von (X, Y) . Wir sagen, (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind konkordant, falls $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) > 0$ gilt. Die Realisationen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind diskordant, falls $(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) < 0$ gilt.

Alternativ können wir formulieren: (x_1, y_1) und (x_2, y_2) sind konkordant, falls $x_1 < x_2$ und $y_1 < y_2$ oder falls $x_1 > x_2$ und $y_1 > y_2$ gilt, und diskordant, falls $x_1 < x_2$ und $y_1 > y_2$ oder falls $x_1 > x_2$ und $y_1 < y_2$ gilt.

Satz 4.2 Seien (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) unabhängige Vektoren von stetigen Zufallsvariablen mit gemeinsamen Verteilungsfunktionen H_1 bzw. H_2 und denselben Randverteilungen F (von X_1 und X_2) und G (von Y_1 und Y_2). Seien C_1 und C_2 die Copulas von (X_1, Y_1) bzw. (X_2, Y_2) , so daß $H_1(x, y) = C_1(F(x), G(y))$ und $H_2(x, y) = C_2(F(x), G(y))$ gilt. Q bezeichne die Differenz zwischen den Wahrscheinlichkeiten für Konkordanz und Diskordanz von (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) , d. h. Q ist gegeben durch

$$Q = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (4.1)$$

Dann gilt

$$Q = Q(C_1, C_2) = 4 \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) - 1. \quad (4.2)$$

Beweis: [ELM01] Da die Zufallsvariablen stetig sind gilt $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1 - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0]$. Somit erhalten wir

$$Q = 2 P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1. \quad (4.3)$$

Nun gilt zudem $P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] + P[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2]$. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten können wir bewerten, indem wir über die Verteilungsfunktion von einem der beiden Vektoren (X_1, Y_1) oder (X_2, Y_2) integrieren. Für die erste Wahrscheinlichkeit erhalten wir somit

$$\begin{aligned} P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] &= P[X_2 < X_1, Y_2 < Y_1] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} P[X_2 \leq x, Y_2 \leq y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} C_2(F(x), G(y)) dC_1(F(x), G(y)). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsintegraltransformationen $u = F(x)$ und $v = G(y)$ liefern uns

$$P[X_1 > X_2, Y_1 > Y_2] = \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

Gleicherweise erhalten wir für die zweite Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}[X_2 > x, Y_2 > y] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} [1 - F(x) - G(y) + C_2(F(x), G(y))] dC_1(F(x), G(y)) \\ &= \int_{[0,1]^2} [1 - u - v + C_2(u, v)] dC_1(u, v). \end{aligned}$$

Nun ist C_1 die gemeinsame Verteilungsfunktion von U_{01} -verteilten Zufallsvariablen U und V , so daß $\mathbb{E}(U) = 1/2 = \mathbb{E}(V)$ gilt. Dies liefert uns

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X_1 < X_2, Y_1 < Y_2] &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v) \\ &= \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v). \end{aligned}$$

Zusammengefaßt haben wir nun

$$\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] = 2 \int_{[0,1]^2} C_2(u, v) dC_1(u, v).$$

Dies eingesetzt in (4.3) liefert die Behauptung. \square

Aufgrund von (4.1) wird Q auch als *Konkordanz-Funktion* bezeichnet. Einige wichtige Eigenschaften von Q werden im folgenden Korollar zusammengefaßt.

Korollar 4.3 *Seien C_1, C_2 und Q so gewählt wie in Satz 4.2. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. Q ist symmetrisch in den Argumenten, d. h., es gilt $Q(C_1, C_2) = Q(C_2, C_1)$,
2. Q ist monoton steigend in jedem Argument, d. h., falls $C_1 \prec C'_1$ und $C_2 \prec C'_2$ für alle $(u, v) \in [0, 1]^2$, dann gilt $Q(C_1, C_2) \leq Q(C'_1, C'_2)$,
3. Copulas in Q können durch survival copulas ersetzt werden, d. h. $Q(C_1, C_2) = Q(\widehat{C}_1, \widehat{C}_2)$.

Definition 4.4 (Konkordanz-Maß [Sca84]) *Ein reellwertiges Maß der Abhängigkeit κ zwischen zwei stetigen Zufallsvariablen X und Y mit Copula C bezeichnen wir als Konkordanz-Maß, falls es den folgenden Eigenschaften genügt:*

1. κ ist für beliebige Paare von stetigen Zufallsvariablen X und Y definiert,
2. $-1 \leq \kappa_{X,Y} \leq 1$, $\kappa_{X,X} = 1$ und $\kappa_{X,-X} = -1$,

3. $\kappa_{X,Y} = \kappa_{Y,X}$,
4. falls X und Y unabhängig sind, dann gilt $\kappa_{X,Y} = \kappa_{\Pi} = 0$,
5. $\kappa_{-X,Y} = \kappa_{X,-Y} = -\kappa_{X,Y}$,
6. falls C_1 und C_2 Copulas sind, so daß $C_1 \prec C_2$ gilt, dann folgt $\kappa_{C_1} \leq \kappa_{C_2}$,
7. sei $(X_n, Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von stetigen Zufallsvektoren mit Copulas C_n . Falls die Folge $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen C konvergiert, dann gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa_{C_n} = \kappa_C$.

Die Tatsache, daß Konkordanz-Maße das 6. Kriterium in Definition 4.4 erfüllen, ist ein Grund dafür, daß „ \prec “ als Konkordanz-Ordnung bezeichnet wird.

4.4 Kendalls τ und Spearmans ρ

In diesem Abschnitt stellen wir zwei wichtige Maße der Abhängigkeit (bzw. Konkordanz-Maße) vor, Kendalls τ und Spearmans ρ . Neben den Grundeigenschaften werden wir auch deren Beziehung zueinander untersuchen.

Definition 4.5 (Kendalls τ) Seien (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren. Dann definieren wir Kendalls τ durch

$$\tau(X_1, Y_1) = \tau_{X_1, Y_1} := \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]. \quad (4.4)$$

Somit ist Kendalls τ einfach die Differenz zwischen der Wahrscheinlichkeit für Konkordanz und der Wahrscheinlichkeit für Diskordanz, vgl. (4.1).

Offensichtlich hängt die Konkordanz-Funktion Q nicht von den Randverteilungen ab. Wir können daher Kendalls τ durch das zugrundeliegende Copula zweier Zufallsvariablen X und Y ausdrücken, wie wir im folgenden Satz sehen werden.

Satz 4.4 Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C . Dann ist Kendalls τ von X und Y gegeben durch

$$\tau_{X,Y} = \tau_C = Q(C, C) = 4 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (4.5)$$

Beweis: Ein einfacher Vergleich von (4.1), (4.2) und (4.4) liefert die Behauptung. \square

Bemerkung 4.1 Das Integral in (4.5) ist der Erwartungswert von $C(U, V)$, wobei U und V U_{01} -verteilte Zufallsvariablen mit Copula C sind. Somit ist Kendalls τ gegeben durch $\tau_C = 4 \mathbb{E}_C(C(U, V)) - 1$. Hierbei bezeichne \mathbb{E}_C den Erwartungswert bez. des durch das Copula C induzierten Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbb{P}_C .

Definition 4.6 (Spearman's ρ) Seien (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) und (X_3, Y_3) drei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren. Dann definieren wir Spearman's ρ durch

$$\rho_S(X_1, Y_1) = \rho_{X_1, Y_1}^S := 3(\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0]). \quad (4.6)$$

Somit ist Spearman's ρ proportional zur Differenz zwischen der Wahrscheinlichkeit für Konkordanz und der Wahrscheinlichkeit für Diskordanz bez. der Zufallsvektoren (X_1, Y_1) und (X_2, Y_3) .

Sei nun H die gemeinsame Verteilungsfunktion und C das Copula der Zufallsvektoren (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) und (X_3, Y_3) , ferner seien F und G die Randverteilungen. Die Zufallsvektoren (X_1, Y_1) und (X_2, Y_3) haben zwar dieselben Randverteilungen F und G , allerdings hat natürlich (X_1, Y_1) die gemeinsame Verteilungsfunktion $H(x, y)$, während (X_2, Y_3) die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x)G(y)$ hat, da X_2 und Y_3 unabhängig sind. Daher ist das Copula von X_2 und Y_3 auch Π . Gleicherweise sind auch X_3 und Y_2 unabhängig, so daß wir anstelle von (X_2, Y_3) auch (X_3, Y_2) in (4.6) wählen könnten.

Wir wollen eine vielleicht intuitivere Definition [Sch03] von Spearman's ρ nachstellen.

Definition 4.7 (Spearman's ρ) Seien (X_1, Y_1) , X_2 und Y_2 unabhängige Zufallsvariablen bzw. -vektoren. Es gelte $X_i \sim F$ und $Y_i \sim G$ für $i = 1, 2$, und es sei H die gemeinsame Verteilungsfunktion von (X_1, Y_1) . Dann ist Spearman's ρ proportional zur Differenz zwischen der Wahrscheinlichkeit für Konkordanz und der Wahrscheinlichkeit für Diskordanz bez. der Zufallsvektoren (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) , d. h. es gilt

$$\rho_S(X_1, Y_1) = \rho_{X_1, Y_1}^S := 3(\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]). \quad (4.7)$$

Ebenso wie Kendalls τ können wir natürlich auch Spearman's ρ zweier Zufallsvariablen durch das zugrundeliegende Copula darstellen.

Satz 4.5 Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C . Dann ist Spearman's ρ von X und Y gegeben durch

$$\rho_{X, Y}^S = \rho_C^S = 3Q(C, \Pi) = 12 \int_{[0,1]^2} uv \, dC(u, v) - 3 = 12 \int_{[0,1]^2} C(u, v) \, du \, dv - 3. \quad (4.8)$$

Beweis: Nach Definition 4.7 sind X_2 und Y_2 unabhängig und haben somit das Copula $\Pi(u, v) = uv$. Mit Satz 4.2 und (4.7) erhalten wir

$$\rho_{X, Y}^S = 3Q(C, \Pi) = 12 \int_{[0,1]^2} uv \, dC(u, v) - 3.$$

Die Symmetrie, d. h. $12 \int_{[0,1]^2} uv \, dC(u, v) - 3 = 12 \int_{[0,1]^2} C(u, v) \, du \, dv - 3$, erhalten wir mit dem 1. Teil von Korollar 4.3 und der Tatsache, daß $d\Pi(u, v) = du \, dv$ gilt. \square

Die Konstante „3“ in (4.6) bzw. (4.7) und (4.8) dient der „Normalisierung“. Dies wird im folgenden Satz durch (4.9) verdeutlicht.

Satz 4.6 *Sei C ein beliebiges Copula. Dann gilt*

$$Q(C, \Pi) \in [-1/3, 1/3]. \quad (4.9)$$

Beweis: Für das Copula C gilt die Fréchet-Hoeffding-Schranken-Ungleichung $W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v)$. Wir betrachten nun $Q(W, \Pi)$ und $Q(M, \Pi)$ und erhalten mit (4.2) das Folgende:

$$Q(W, \Pi) = 4 \int_{[0,1]^2} uv \, dW(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u(1-u) \, du - 1 = -1/3 \text{ und}$$

$$Q(M, \Pi) = 4 \int_{[0,1]^2} uv \, dM(u, v) - 1 = 4 \int_0^1 u^2 \, du - 1 = 1/3.$$

Mit der Fréchet-Hoeffding-Schranken-Ungleichung und Teil 2 von Korollar 4.3 erhalten wir $Q(W, \Pi) \leq Q(C, \Pi) \leq Q(M, \Pi)$ und somit die Behauptung. \square

Bemerkung 4.2 Auf analogem Wege wie im Beweis von Satz 4.6 zeigt man, daß $Q(C, W) \in [-1, 0]$ und $Q(C, M) \in [0, 1]$ für beliebiges Copula C gilt. Die Spezialfälle $Q(W, W) = -1$, $Q(\Pi, \Pi) = 0$, $Q(M, M) = 1$ und $Q(W, M) = 0$ lassen sich ebenso zeigen. $Q(C, C) \in [-1, 1]$ gilt natürlich trivialerweise für beliebiges Copula C , da Q die Differenz zwischen zwei Wahrscheinlichkeiten ist.

Bemerkung 4.3 Wir können Spearmans ρ aus (4.8) auch als

$$\rho_C^S = 12 \int_{[0,1]^2} [C(u, v) - uv] \, du \, dv \quad (4.10)$$

umschreiben. Nun kann man ρ_C^S auch als Maß der „durchschnittlichen Distanz“ zwischen der Verteilung von X und Y (dargestellt durch C) und der Unabhängigkeit (dargestellt durch das Copula Π) interpretieren.

In dem folgenden Korollar werden wir sehen, in welcher Beziehung Spearmans ρ zum gewöhnlichen Korrelationskoeffizienten ρ steht.

Korollar 4.7 *Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C . Es gelte $X \sim F$ und $Y \sim G$. Dann gilt*

$$\rho_S(X, Y) = \rho_{X, Y}^S = \rho(F(X), G(Y)),$$

wobei $U = F(X)$ und $V = G(Y)$ U_{01} -verteilte Zufallsvariablen mit Copula C sind.

Beweis: Sei also $U = F(X)$ und $V = G(Y)$. Mit Satz 4.5 erhalten wir

$$\rho_S(X, Y) = \rho_{X, Y}^S = 12 \int_{[0,1]^2} uv \, dC(u, v) - 3 = 12 \mathbb{E}(UV) - 3 = \frac{\mathbb{E}(UV) - 1/4}{1/12}.$$

Da U und V U_{01} -verteilte Zufallsvariablen sind, gilt $\mathbb{E}(U) = 1/2 = \mathbb{E}(V)$ sowie $\sigma_U^2 = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2 = 1/3 - 1/4 = 1/12 = \sigma_V^2$. Somit erhalten wir

$$\rho_S(X, Y) = \frac{\mathbb{E}(UV) - 1/4}{1/12} = \frac{\mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V)}{\sqrt{\sigma_U^2\sigma_V^2}} = \frac{\text{Cov}(U, V)}{\sqrt{\sigma_U^2\sigma_V^2}} = \rho(U, V),$$

was zu zeigen war. \square

Satz 4.8 *Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C . Dann genügen Kendalls τ und Spearmans ρ den 7 Eigenschaften in Definition 4.4 für ein Konkordanz-Maß.*

Beweis: Für Kendalls τ und Spearmans ρ folgen die Eigenschaften 1–6 in Definition 4.4 direkt aus den Eigenschaften von Q in Satz 4.2, Korollar 4.3 und Bemerkung 4.2. Die Eigenschaft 7 folgt aus der Tatsache, daß die Lipschitz-Bedingung in Satz 3.6 bzw. Satz 3.21 gleichmäßige Stetigkeit der Copulas impliziert, so daß $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen C konvergiert. \square

Mit Satz 4.6 und Bemerkung 4.2 folgt leicht, daß für zwei stetige Zufallsvariablen X und Y mit Copula C zum einen $C = M \Rightarrow \tau_C = \rho_C^S = 1$ und zum anderen $C = W \Rightarrow \tau_C = \rho_C^S = -1$ gilt. Wie wir im folgenden Satz sehen werden, gilt auch die Umkehrung.

Satz 4.9 *Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C . Bezeichne κ entweder Kendalls τ oder Spearmans ρ . Dann gelten die beiden folgenden Aussagen:*

1. $\kappa(X, Y) = 1 \Leftrightarrow C = M$,
2. $\kappa(X, Y) = -1 \Leftrightarrow C = W$.

Für den Beweis siehe [EMS02].

Bemerkung 4.4 Da Kendalls τ und Spearmans ρ in Termen des Copulas, welches invariant unter streng monoton steigenden Transformationen der Zufallsvariablen ist, dargestellt werden können, sind diese auch invariant unter streng monoton steigenden Transformationen der Zufallsvariablen.

Die beiden folgenden Sätze und das daraus resultierende Korollar zeigen, in welcher Beziehung Kendalls τ und Spearmans ρ zueinander stehen, indem allgemeine Ungleichungen für diese beiden Konkordanz-Maße angegeben werden. Für die Beweise der Sätze sei auf die Arbeit von Nelsen [Nel99] verwiesen, der wiederum die Beweise aus [Kru58] adaptiert hat.

Satz 4.10 Seien (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) und (X_3, Y_3) drei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvektoren. Kendalls τ und Spearmans ρ seien so definiert wie in (4.4) bzw. (4.6). Dann gilt

$$-1 \leq 3\tau_{X_1, Y_1} - 2\rho_{X_1, Y_1}^S \leq 1. \quad (4.11)$$

Satz 4.11 Mit denselben Voraussetzungen wie in Satz 4.10 gilt

$$\frac{1 + \rho_{X_1, Y_1}^S}{2} \geq \left(\frac{1 + \tau_{X_1, Y_1}}{2} \right)^2 \quad (4.12)$$

und

$$\frac{1 - \rho_{X_1, Y_1}^S}{2} \geq \left(\frac{1 - \tau_{X_1, Y_1}}{2} \right)^2. \quad (4.13)$$

Kombinieren wir nun (4.11), (4.12) und (4.13), so erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 4.12 Mit denselben Voraussetzungen wie in Satz 4.10 gilt

$$\frac{3\tau_{X_1, Y_1} - 1}{2} \leq \rho_{X_1, Y_1}^S \leq \frac{1 + 2\tau_{X_1, Y_1} - \tau_{X_1, Y_1}^2}{2} \text{ für } \tau_{X_1, Y_1} \geq 0 \quad (4.14)$$

und

$$\frac{\tau_{X_1, Y_1}^2 + 2\tau_{X_1, Y_1} - 1}{2} \leq \rho_{X_1, Y_1}^S \leq \frac{1 + 3\tau_{X_1, Y_1}}{2} \text{ für } \tau_{X_1, Y_1} \leq 0. \quad (4.15)$$

4.5 Tail-Abhängigkeit

Das Konzept der *Tail-Abhängigkeit*⁴ zielt darauf ab, die Abhängigkeit im Tail des oberen bzw. unteren Quadranten der gemeinsamen Verteilungsfunktion zu erklären. Im Gegensatz zu Kendalls τ und Spearmans ρ , welche ein Maß für die globale Abhängigkeit sind, stellen die obere und untere Tail-Abhängigkeit ein lokales Maß der Abhängigkeit dar, in dem Sinne, daß sie nur für uns interessante Gebiete (die oberen und unteren Quadranten) definiert sind. Wir interessieren uns also für das Maß der Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen in bezug auf deren Tail-Verhalten, d. h. für ein Szenario, in dem die Zufallsvariablen extreme Werte annehmen.

Die Tail-Abhängigkeit ist ein asymptotisches Maß zweier Zufallsvariablen. Falls die Randverteilungen der Zufallsvariablen stetig sind, dann ist die Tail-Abhängigkeit genauso wie Kendalls τ und Spearmans ρ auch eine Copula-Eigenschaft und somit invariant unter streng monoton steigenden Transformationen der Zufallsvariablen.

⁴Wir könnten auch „Tail“ als „Schwanz“ oder „Flanke“ übersetzen, allerdings ist der Autor der Auffassung, daß man nicht zwingenderweise alle englischen Fachausdrücke zu übersetzen habe. Vielleicht sollten wir sogar konsequenterweise „Tail dependence“ anstelle von „Tail-Abhängigkeit“ verwenden.

Definition 4.8 (obere und untere Tail-Abhängigkeit) Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C . Es gelte $X \sim F$ und $Y \sim G$. Dann definieren wir den Koeffizienten λ_U der oberen Tail-Abhängigkeit durch

$$\lambda_U := \lim_{u \uparrow 1} \mathbb{P}[Y > G^{(-1)}(u) \mid X > F^{(-1)}(u)],^5 \quad (4.16)$$

vorausgesetzt der Grenzwert $\lambda_U \in [0, 1]$ existiert. Falls $\lambda_U \in]0, 1]$ gilt, dann sagen wir, X und Y sind asymptotisch abhängig im oberen Tail. Falls $\lambda_U = 0$ gilt, dann sind X und Y asymptotisch unabhängig im oberen Tail. Mit dem zugrundeliegenden Copula C läßt sich der Koeffizient λ_U darstellen als

$$\lambda_U = \lim_{u \uparrow 1} \frac{\overline{C}(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \uparrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}, \quad (4.17)$$

wobei natürlich $\overline{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v)$ die uns bereits bekannte gemeinsame survival function bezeichnet. Den Koeffizienten λ_L der unteren Tail-Abhängigkeit definieren wir gleicherweise durch

$$\lambda_L := \lim_{u \downarrow 0} \mathbb{P}[Y \leq G^{(-1)}(u) \mid X \leq F^{(-1)}(u)], \quad (4.18)$$

falls der Grenzwert existiert. In diesem Falle sagen wir, X und Y sind asymptotisch abhängig im unteren Tail, falls $\lambda_L \in]0, 1]$, und asymptotisch unabhängig im unteren Tail, falls $\lambda_L = 0$ gilt. Das zugrundeliegende Copula C liefert uns

$$\lambda_L = \lim_{u \downarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}. \quad (4.19)$$

In der Extremwerttheorie wird von den Koeffizienten λ_U und λ_L ausgiebig Gebrauch gemacht, um die Eigenschaft zu beschreiben, daß die eine Variable extreme Werte annimmt, unter der Voraussetzung, daß die andere extreme Werte annimmt.

Bemerkung 4.5 Rufen wir uns noch einmal für zwei U_{01} -verteilte Zufallsvariablen U und V und deren Copula C sowie deren survival copula \widehat{C} sowie deren gemeinsame survival function \overline{C} die Gleichung $\overline{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v) = \widehat{C}(1 - u, 1 - v)$ in Erinnerung. Dann folgt

$$\lim_{u \uparrow 1} \frac{\overline{C}(u, u)}{1 - u} = \lim_{u \uparrow 1} \frac{\widehat{C}(1 - u, 1 - u)}{1 - u} = \lim_{u \downarrow 0} \frac{\widehat{C}(u, u)}{u},$$

so daß der Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit von C gleich dem Koeffizienten der unteren Tail-Abhängigkeit von \widehat{C} ist. Gleichweise ist der Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit von C gleich dem Koeffizienten der oberen Tail-Abhängigkeit von \widehat{C} .

⁵Es sei angemerkt, daß es sich bei $G^{(-1)}(u)$ um den Value-at-Risk $\text{VaR}_u(Y)$ und bei $F^{(-1)}(u)$ um $\text{VaR}_u(X)$ handelt, da $u \in [0, 1]$, auch wenn man gewöhnlich α anstelle von u benutzt.

4.6 Quadranten-Abhängigkeit

Eine sehr aktuelle Abhängigkeitseigenschaft zweier Zufallsvariablen ist der „Mangel an Abhängigkeit“ bzw. das „Fehlen von Abhängigkeit“, was gleichbedeutend mit Unabhängigkeit ist. Daher ist es sinnvoll, die Abhängigkeit zweier Zufallsvariablen mit der Unabhängigkeit von Zufallsvariablen zu vergleichen, d. h. wir interessieren uns dafür, wie sich die Zufallsvariablen gegenüber der Annahme, als wären sie unabhängig, verhalten. Wir werden zudem sehen, daß die Quadranten-Abhängigkeit auch eine Copula-Eigenschaft ist und somit invariant unter streng monoton steigenden Transformationen.

Definition 4.9 (PQD [Leh66]) Seien X und Y Zufallsvariablen. Wir sagen, X und Y haben eine positive Quadranten-Abhängigkeit oder sind PQD (positively quadrant dependent), falls für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ das Folgende gilt:

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x] P[Y \leq y]. \quad (4.20)$$

Wir schreiben kurz PQD(X, Y).

Sei nun C das Copula und H die gemeinsame Verteilungsfunktion von X und Y . Wie wir bereits wissen, gilt $\bar{H}(x, y) = 1 - F(x) - G(y) + H(x, y)$ sowie $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ sowie $\bar{G}(y) = 1 - G(y)$. Somit ist (4.20) äquivalent zu

$$P[X > x, Y > y] \geq P[X > x] P[Y > y] \quad (4.21)$$

und zu

$$H(x, y) \geq F(x)G(y) \text{ für alle } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.22)$$

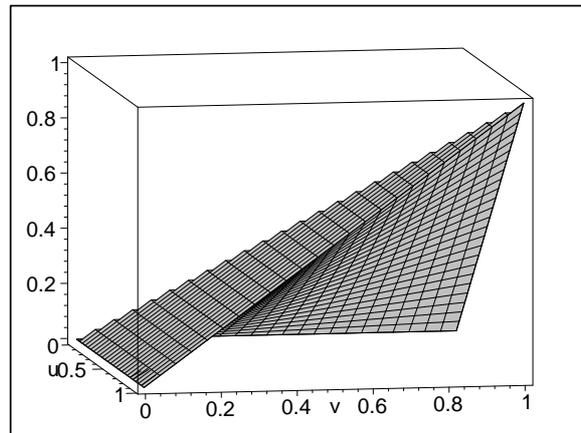
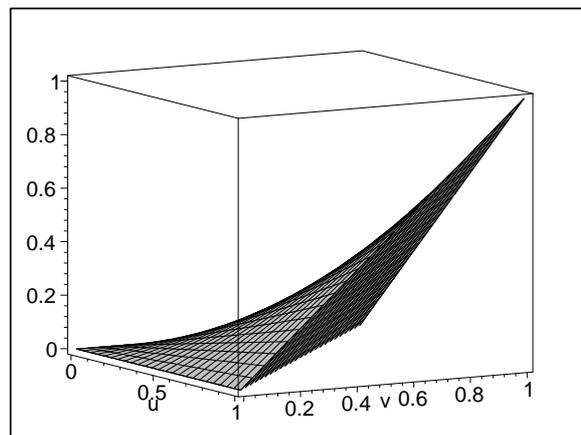
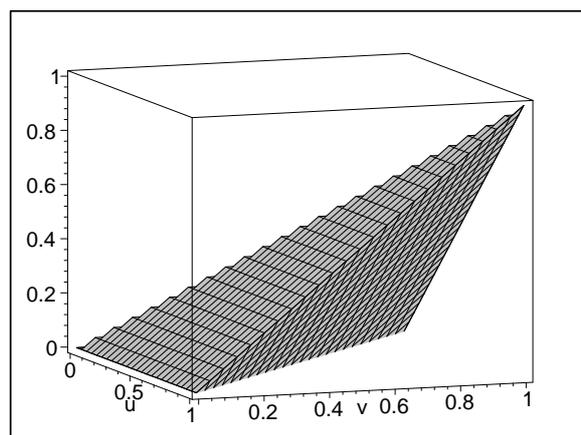
sowie zu

$$C(u, v) \geq uv \text{ für alle } (u, v) \in [0, 1]^2. \quad (4.23)$$

X und Y sind also nach (4.20) und (4.21) PQD, falls die Wahrscheinlichkeit, daß sie gleichzeitig kleine (oder große) Werte annehmen, mindestens so groß ist, als wären sie unabhängig. Die Ungleichungen (4.22) und (4.23) besagen, daß die gemeinsame Verteilungsfunktion H sowie deren Copula C PQD sind.

Indem wir die Bedeutung der Ungleichungen (4.20)–(4.23) umkehren, erhalten wir die analoge Definition der *negativen Quadranten-Abhängigkeit*. Wir schreiben dann NQD(X, Y) (*negatively quadrant dependent*). X und Y sind demnach NQD, falls die Wahrscheinlichkeit, daß sie gleichzeitig kleine (oder große) Werte annehmen, höchstens so groß ist, als wären sie unabhängig. Dies bedeutet, daß große Werte der einen Zufallsvariablen zu kleinen Werten der anderen Zufallsvariablen tendieren, und umgekehrt.

Ungleichung (4.23) besagt, daß der Graph des Copulas C entweder auf dem Graphen oder oberhalb des Graphen des Produkt-Copulas Π liegt, falls X und Y PQD sind. Falls X und Y NQD sind, dann liegt der Graph von C auf dem Graphen oder unterhalb des Graphen von Π . Rufen wir uns noch einmal die Abbildung 3.3 des Produkt-Copulas Π

Abbildung 4.1: Der von M und Π erzeugte Dreiflächner.Abbildung 4.2: Der von W und Π erzeugte Dreiflächner.Abbildung 4.3: Der von M und W erzeugte Vierflächner.

in Erinnerung und zudem die Abbildungen 3.1 und 3.2 der oberen und unteren Fréchet-Hoeffding-Schranken M und W . Fassen wir nun die von uns gewonnenen Ergebnisse zusammen, so lassen sich diese in den Abbildungen 4.1 und 4.2 verdeutlichen. In Abbildung 4.1 sind die Graphen von M und Π in einem Einheitswürfel zusammengefaßt, welche nun einen Dreiflächner erzeugen. Falls also ein Copula PQD ist, dann „verschwindet“ sein Graph in diesem Dreiflächner. Ebenso sind in Abbildung 4.2 die Graphen von W und Π in einem Einheitswürfel zusammengefaßt, welche ebenfalls einen Dreiflächner erzeugen. Somit „verschwindet“ der Graph eines Copulas in diesem Dreiflächner, falls das Copula NQD ist.

Diese beide Dreiflächner teilen somit den Bildbereich des Graphen eines Copulas, dargestellt durch den von M und W erzeugten Vierflächner in Abbildung 4.3 (=Abbildung 3.4), in zwei Regionen auf. Die eine Region, dargestellt in Abbildung 4.1, „beherbergt“ somit gewissermaßen die Copulas der positiven Quadranten-Abhängigkeit, wohingegen die andere Region, dargestellt in Abbildung 4.2, die Copulas der negativen Quadrantenabhängigkeit „beherbergt“.

In bezug auf die Konkordanz-Ordnung (siehe Definition 3.19) ist Ungleichung (4.23) dasselbe wie $C \succ \Pi$, d. h. C ist größer als Π . Die Konkordanz-Ordnung wird daher auch oftmals „mehr PQD“-Ordnung genannt.

Der folgende Satz liefert eine Folgerung für die Beziehung zwischen Kendalls τ und Spearmans ρ , falls die zugrundeliegenden Zufallsvariablen PQD sind.

Satz 4.13 *Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C und gemeinsamer Verteilungsfunktion H sowie den Randverteilungen F und G . Bezeichne $\tau_{X,Y}$ Kendalls τ und $\rho_{X,Y}^S$ Spearmans ρ . Falls X und Y PQD sind, dann gilt*

$$3\tau_{X,Y} \geq \rho_{X,Y}^S \geq 0. \quad (4.24)$$

Beweis: Es gilt $Q(\Pi, \Pi) = 0$. Nun ist C PQD nach Voraussetzung, so daß (4.23) gilt. Zweimaliges Anwenden des 2. Teils von Korollar 4.3 auf $Q(\Pi, \Pi)$ liefert uns $Q(C, C) \geq Q(C, \Pi) \geq Q(\Pi, \Pi)$. Multiplizieren wir dann diese Ungleichungskette mit dem Faktor 3, so erhalten wir die Behauptung. \square

Bemerkung 4.6 Obwohl die Quadranten-Abhängigkeit eine globale Eigenschaft ist, da (4.22) für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ und (4.23) für alle $(u, v) \in [0, 1]^2$ gelten muß, können wir durchaus an eine lokale Eigenschaft dieser Ungleichungen denken, und zwar im folgenden Sinne: Für die Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, bei denen $H(x, y) - F(x)G(y) \geq 0$ gilt, sind X und Y lokal PQD, wohingegen bei den Paaren $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, bei denen $H(x, y) - F(x)G(y) \leq 0$ gilt, X und Y lokal NQD sind. Gleicherweise sind X und Y lokal PQD bei den Paaren $(u, v) \in [0, 1]^2$, für die $C(u, v) - uv \geq 0$ gilt, und lokal NQD bei den Paaren $(u, v) \in [0, 1]^2$, für die $C(u, v) - uv \leq 0$ gilt. Wenn wir uns nun (4.10) in Erinnerung rufen, dann läßt sich Spearmans ρ darstellen als

$$\rho_C^S = 12 \int_{[0,1]^2} [C(u, v) - uv] du dv.$$

Dann können wir ρ_C^S bzw. $\rho_C^S/12$ als „durchschnittliche“ Quadranten-Abhängigkeit (positiv oder negativ) für Zufallsvariablen mit Copula C interpretieren.

Zum Abschluß dieses Abschnitts stellen wir die in den vorangegangenen Abschnitten erklärten Begriffe Komonotonie, PQD, Kendalls τ und Spearmans ρ zueinander in Beziehung.

Korollar 4.14 *Seien X und Y stetige Zufallsvariablen mit Copula C . Dann gilt die folgende Implikationskette:*

$$X \text{ und } Y \text{ sind komonoton} \Rightarrow X \text{ und } Y \text{ sind PQD} \Rightarrow \tau_{X,Y} \geq 0, \rho_{X,Y}^S \geq 0. \quad (4.25)$$

Beweis: Die Komonotonie besagt, daß X und Y das Copula M haben. Nun ist immer $M(u, v) \geq \Pi(u, v) = uv$ für alle $(u, v) \in [0, 1]^2$, so daß (4.23) gilt. Daraus folgt die erste Implikation. Die zweite Implikation folgt mit Satz 4.13. \square

Bemerkung 4.7 Wie wir bereits in Satz 4.9 gesehen haben, gilt sogar $C = M \Leftrightarrow \tau_{X,Y} = 1, \rho_{X,Y}^S = 1$. Allerdings läßt sich für PQD keine Äquivalenz einbringen. Nimmt man PQD hinzu, läßt sich also nur die in (4.25) abgeschwächte Implikationskette zeigen.

Im Sinne der Implikationskette (4.25) kann man demnach die Komonotonie als „stärkste“ Konkordanz bzw. positive Abhängigkeit bezeichnen.

4.7 Abhängigkeit im n -Dimensionalen

In diesem Abschnitt werden wir kurz darauf eingehen, inwieweit sich einige Abhängigkeitskonzepte der vorangegangenen Abschnitte auf den n -dimensionalen Fall verallgemeinern lassen.⁶

Die Komonotonie läßt sich nicht ohne weiteres aufs n -Dimensionale erweitern, da für $n \geq 3$ die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W^n kein n -Copula ist. Somit wird uns die Möglichkeit genommen, die Antimonotonie zu definieren.

Wie sieht es nun mit der Konkordanz und den daraus resultierenden Konkordanzmaßen, Kendalls τ und Spearmans ρ , aus? Betrachten wir dazu zwei Realisationen $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ und $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ eines Vektors $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ von stetigen Zufallsvariablen. Dann läßt sich die Konkordanz wie folgt verallgemeinern: Wir sagen, \mathbf{x} und \mathbf{y} sind konkordant, falls für alle $i \neq j$ die Paare (x_i, x_j) und (y_i, y_j) konkordant sind (vgl. Definition 4.3). Allerdings läßt sich die Diskordanz für $n \geq 3$ nicht verallgemeinern, denn falls z. B. (x_1, x_2) und (y_1, y_2) sowie (x_2, x_3) und (y_2, y_3) diskordant sind, dann müssen zwangsläufig (x_1, x_3) und (y_1, y_3) konkordant sein. Daher machen wir nun

⁶Es sei angemerkt, daß wir nur einige ausgewählte Möglichkeiten der Erweiterung aufs n -Dimensionale vorstellen. In der Literatur sind eine Vielzahl von Varianten zu finden, auf die wir hier nicht in ihrer Gänze eingehen können.

den in [Nel02] zu findenen Ansatz, die Wahrscheinlichkeit für Konkordanz isoliert zu betrachten im Gegensatz zur Differenz zwischen den Wahrscheinlichkeiten für Konkordanz und Diskordanz.

Satz 4.15 *Seien $\mathbf{X}_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n})$ und $\mathbf{X}_2 = (X_{21}, \dots, X_{2n})$ unabhängige Vektoren von stetigen Zufallsvariablen mit n -dimensionalen Verteilungsfunktionen H_1 bzw. H_2 und denselben Randverteilungen F_1 (von X_{11} und X_{21}), \dots , F_n (von X_{1n} und X_{2n}). Seien C_1 und C_2 die n -Copulas von \mathbf{X}_1 bzw. \mathbf{X}_2 , so daß $H_1(x_1, \dots, x_n) = C_1(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ und $H_2(x_1, \dots, x_n) = C_2(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$ gilt. Q'_n bezeichne die Wahrscheinlichkeit für Konkordanz zwischen \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 , d. h., Q'_n ist gegeben durch*

$$Q'_n = P[\mathbf{X}_1 > \mathbf{X}_2] + P[\mathbf{X}_1 < \mathbf{X}_2]. \quad (4.26)$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} Q'_n &= Q'_n(C_1, C_2) = \int_{[0,1]^n} C_2(\mathbf{u}) dC_1(\mathbf{u}) + \int_{[0,1]^n} C_1(\mathbf{u}) dC_2(\mathbf{u}) \\ &= \int_{[0,1]^n} [C_2(\mathbf{u}) + \overline{C}_2(\mathbf{u})] dC_1(\mathbf{u}). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Beweis: Für den linken Summanden in (4.26) gilt

$$\begin{aligned} P[\mathbf{X}_1 > \mathbf{X}_2] &= P[\mathbf{X}_2 < \mathbf{X}_1] = P[X_{21} < X_{11}, \dots, X_{2n} < X_{1n}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P[X_{21} \leq x_1, \dots, X_{2n} \leq x_n] dC_1(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} C_2(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) dC_1(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeitsintegraltransformationen $u_1 = F_1(x_1), \dots, u_n = F_n(x_n)$ liefern uns

$$P[\mathbf{X}_1 > \mathbf{X}_2] = \int_{[0,1]^n} C_2(\mathbf{u}) dC_1(\mathbf{u}).$$

Gleicherweise erhalten wir für den rechten Summanden in (4.26)

$$P[\mathbf{X}_1 < \mathbf{X}_2] = \int_{[0,1]^n} C_1(\mathbf{u}) dC_2(\mathbf{u}).$$

Dieses Resultat können wir aber auch folgendermaßen darstellen:

$$\begin{aligned} P[\mathbf{X}_1 < \mathbf{X}_2] &= P[\mathbf{X}_2 > \mathbf{X}_1] = P[X_{21} > X_{11}, \dots, X_{2n} > X_{1n}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} P[X_{21} > x_1, \dots, X_{2n} > x_n] dC_1(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{C}_2(\overline{F}_1(x_1), \dots, \overline{F}_n(x_n)) dC_1(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{C}_2(1 - F_1(x_1), \dots, 1 - F_n(x_n)) dC_1(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)). \end{aligned}$$

Mit den Wahrscheinlichkeitsintegraltransformationen wie oben erhalten wir dann

$$\begin{aligned} P[\mathbf{X}_1 < \mathbf{X}_2] &= \int_{[0,1]^n} \widehat{C}_2(1 - u_1, \dots, 1 - u_n) dC_1(u_1, \dots, u_n) \\ &= \int_{[0,1]^n} \overline{C}_2(\mathbf{u}) dC_1(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. \square

Wir sind nun in der Lage, ein n -dimensionales Analogon zu Q aus (4.2) für stetige Zufallsvektoren \mathbf{X}_1 und \mathbf{X}_2 mit n -Copulas C_1 bzw. C_2 als lineare Funktion von Q'_n zu definieren. Wir bezeichnen dieses mit Q_n , und es ist gegeben durch

$$Q_n(C_1, C_2) = \frac{1}{2^{n-1} - 1} (2^{n-1} Q'_n(C_1, C_2) - 1). \quad (4.28)$$

Diese Definition ergibt sich aus der Tatsache, daß $Q'_n(M^n, M^n) = 1$, $Q'_n(M^n, \Pi^n) = 2/(n+1)$ und $Q'_n(\Pi^n, \Pi^n) = 1/2^{n-1}$ gilt. Denn somit folgt $Q_n(M^n, M^n) = 1$, $Q_n(\Pi^n, \Pi^n) = 0$ und $Q_n(M^n, \Pi^n) = \frac{2^n - (n+1)}{(n+1)(2^{n-1} - 1)}$.

Definition 4.10 (Kendalls τ und Spearmans ρ im n -Dimensionalen) *Es sei \mathbf{X} ein stetiger Zufallsvektor mit n -Copula C . Dann ist Kendalls τ gegeben durch*

$$\tau_{n,C} = Q_n(C, C) = \frac{1}{2^{n-1} - 1} \left[2^n \int_{[0,1]^n} C(\mathbf{u}) dC(\mathbf{u}) - 1 \right] \quad (4.29)$$

und Spearmans ρ durch

$$\begin{aligned} \rho_{n,C}^s &= \frac{(n+1)(2^{n-1} - 1)}{2^n - (n+1)} Q_n(C, \Pi^n) \\ &= \frac{n+1}{2^n - (n+1)} \left[2^{n-1} \int_{[0,1]^n} [\Pi^n(\mathbf{u}) + \overline{\Pi}^n(\mathbf{u})] dC(\mathbf{u}) - 1 \right] \\ &= \frac{n+1}{2^n - (n+1)} \left[2^{n-1} \int_{[0,1]^n} [C(\mathbf{u}) + \overline{C}(\mathbf{u})] d\Pi^n(\mathbf{u}) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Betrachten wir nun, inwiefern sich die Quadranten-Abhängigkeit verallgemeinern läßt. Dazu sei zunächst erwähnt, daß es sich im n -Dimensionalen für $n \geq 3$ anstelle von Quadranten um *Orthanten* handelt.

Definition 4.11 (PLOD, PUOD, POD) *Sei $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ ein Zufallsvektor. Dann definieren wir das Folgende:*

1. \mathbf{X} hat eine positive untere Orthanten-Abhängigkeit oder ist PLOD (positively lower orthant dependent), falls für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ das Folgende gilt:

$$P[\mathbf{X} \leq \mathbf{x}] \geq \prod_{i=1}^n P[X_i \leq x_i]. \quad (4.31)$$

2. \mathbf{X} hat eine positive obere Orthanten-Abhängigkeit oder ist PUOD (positively upper orthant dependent), falls für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ das Folgende gilt:

$$P[\mathbf{X} > \mathbf{x}] \geq \prod_{i=1}^n P[X_i > x_i]. \quad (4.32)$$

3. \mathbf{X} hat eine positive Orthanten-Abhängigkeit oder ist POD (positively orthant dependent), falls für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ sowohl (4.31) als auch (4.32) gilt.

Indem wir die Bedeutung der Ungleichungen (4.31) und (4.32) umkehren, erhalten wir die analogen Definitionen der unteren negativen Orthanten-Abhängigkeit NLOD, der oberen negativen Orthanten-Abhängigkeit NUOD und der negativen Orthanten-Abhängigkeit NOD.

Für $n = 2$ sind (4.31) und (4.32) äquivalent zu (4.20) und (4.21). Daraus folgt, daß PLOD und PUOD für $n = 2$ zueinander äquivalent sind. Für $n \geq 3$ gilt dies i. a. jedoch nicht, wie uns das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 4.1 Sei \mathbf{X} ein 3-dimensionaler Zufallsvektor, der die vier Werte $(1, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/4$ annimmt. Dann ist \mathbf{X} PUOD, aber nicht PLOD, denn wir haben zum einen $P[\mathbf{X} \leq \mathbf{0}] = 0$, während $P[X_1 \leq 0]P[X_2 \leq 0]P[X_3 \leq 0] = 1/8$ ist.

Sei nun H die n -dimensionale Verteilungsfunktion von \mathbf{X} und F_1, \dots, F_n die stetigen Randverteilungen sowie C das n -Copula, dann ist (4.31) äquivalent zu

$$H(x_1, \dots, x_n) \geq F_1(x_1) \cdots F_n(x_n) \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

sowie zu

$$C(\mathbf{u}) \geq \Pi^n(\mathbf{u}) \text{ für alle } \mathbf{u} \in [0, 1]^n.$$

Und gleicherweise ist (4.32) äquivalent zu

$$\overline{H}(x_1, \dots, x_n) \geq \overline{F}_1(x_1) \cdots \overline{F}_n(x_n) \text{ für alle } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$$

sowie zu

$$\overline{C}(\mathbf{u}) \geq \overline{\Pi}^n(\mathbf{u}) = (1 - u_1) \cdots (1 - u_n) \text{ für alle } \mathbf{u} \in [0, 1]^n.$$

Wir haben nun eine Auswahl an Möglichkeiten gesehen, wie man die Abhängigkeitskonzepte aufs n -Dimensionale verallgemeinern kann. Dennoch wollen wir diesen Abschnitt und damit dieses Kapitel mit einer noch offenen und vielleicht richtungsweisenden Frage beenden. Können wir eine Definition für ein n -dimensionales Konkordanz-Maß formulieren, welches vergleichbare Eigenschaften zu denen aus Definition 4.4 hat?

5 Spezielle Copulas

5.1 Archimedische Copulas

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit einer sehr wichtigen Klasse von Copulas, den archimedischen Copulas. Diese Copulas finden vor allem Anwendung in der Finanzwirtschaft und im Versicherungswesen. Dafür sprechen viele Gründe. Es ist leicht, diese Copulas zu konstruieren, eine Vielzahl von Copula-Familien gehören zu dieser Klasse, und sie besitzen zudem sehr schöne Eigenschaften.

5.1.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Dieser Abschnitt ist zum größten Teil an [Nel99] angelehnt.

Definition 5.1 (Pseudo-Inverses) Sei $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(1) = 0$. Dann definieren wir das Pseudo-Inverse von φ durch die Funktion $\varphi^{[-1]}$ mit Definitionsbereich $\text{Dom } \varphi^{[-1]} = [0, \infty]$ und Bildbereich $\text{Ran } \varphi^{[-1]} = [0, 1]$ mittels

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 0, & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \quad (5.1)$$

wobei φ^{-1} das gewöhnliche Inverse bezeichne.

Wir halten fest, daß $\varphi^{[-1]}$ stetig und monoton fallend auf $[0, \infty]$ und streng monoton fallend auf $[0, \varphi(0)]$ ist. Weiterhin gilt $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ für alle $u \in [0, 1]$ und

$$\begin{aligned} \varphi(\varphi^{[-1]}(t)) &= \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ \varphi(0), & \varphi(0) \leq t \leq \infty, \end{cases} \\ &= \min(t, \varphi(0)). \end{aligned}$$

Falls nun $\varphi(0) = \infty$, dann gilt natürlich $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$.

Lemma 5.1 Sei $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(1) = 0$, und sei $\varphi^{[-1]}$ das durch (5.1) definierte Pseudo-Inverse von φ . Die Funktion $C: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$ sei gegeben durch

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)). \quad (5.2)$$

Dann genügt C den Eigenschaften (3.3) und (3.4) für ein Copula.

Beweis: Eigenschaft (3.3) erhalten wir mit (5.1) durch $C(u, 0) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(0)) = 0$, da $\varphi(u) + \varphi(0) =: t \geq \varphi(0)$, und (3.4) durch $C(u, 1) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(1)) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$. GleichermäÙe zeigen wir $C(0, v) = 0$ und $C(1, v) = v$. \square

Das folgende Lemma liefert uns eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Quasi-Monotonie der Funktion C in (5.2).

Lemma 5.2 *Seien φ , $\varphi^{[-1]}$ und C so gewählt wie in Lemma 5.1. C ist dann und nur dann 2-dimensional steigend, falls für alle $v \in [0, 1]$ und $u_1 \leq u_2$ das Folgende gilt:*

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \leq u_2 - u_1. \quad (5.3)$$

Beweis:

„ \Rightarrow “: Sei C 2-dimensional steigend, d. h. $V_C(B) \geq 0$ für alle Rechtecke B mit Eckpunkten in $\text{Dom } C$. Nun ist (5.3) äquivalent zu $V_C([u_1, u_2] \times [v, 1]) \geq 0$. Damit folgt die Behauptung.

„ \Leftarrow “: C genüge nun (5.3). Seien $v_1, v_2 \in [0, 1]$ so gewählt, daß $v_1 \leq v_2$ gilt. Weiterhin gilt die Beziehung

$$C(0, v_2) = 0 \leq v_1 \leq v_2 = C(1, v_2). \quad (5.4)$$

Mit (5.4) und der Stetigkeit von C (φ und $\varphi^{[-1]}$ sind stetig) folgt nun, daß ein $t \in [0, 1]$ existiert, so daß die folgende Äquivalenz gilt:

$$C(t, v_2) = v_1 \Leftrightarrow \varphi^{[-1]}(\varphi(t) + \varphi(v_2)) = v_1 \Leftrightarrow \varphi(v_2) + \varphi(t) = \varphi(v_1). \quad (5.5)$$

Mit (5.5) erhalten wir

$$\begin{aligned} C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_1)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_1)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) - \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v_2) + \varphi(t)) \\ &= C(C(u_2, v_2), t) - C(C(u_1, v_2), t) \\ &\leq C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2), \end{aligned}$$

so daß C 2-dimensional steigend ist. \square

Wir sind nun in der Lage, die Kernaussage dieses Abschnittes zu formulieren.

Satz 5.3 *Seien φ , $\varphi^{[-1]}$ und C so gewählt wie in Lemma 5.1. C ist dann und nur dann ein Copula, falls φ konvex ist.*

Beweis: [Nel99] In Lemma 5.1 haben wir bereits gezeigt, daß C den Eigenschaften (3.3) und (3.4) für ein Copula genügt. Als Folge von Lemma 5.2 müssen wir nun nur noch zeigen, daß (5.3) dann und nur dann gilt, falls φ konvex ist. Wir halten fest, daß φ dann und nur dann konvex ist, falls $\varphi^{[-1]}$ konvex ist. Weiterhin ist (5.3) äquivalent zu

$$u_1 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_2) + \varphi(v)) \leq u_2 + \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(v)),$$

für $u_1 \leq u_2$. Setzen wir $a = \varphi(u_1)$, $b = \varphi(u_2)$ und $c = \varphi(v)$, dann ist (5.3) äquivalent zu

$$\varphi^{[-1]}(a) + \varphi^{[-1]}(b + c) \leq \varphi^{[-1]}(b) + \varphi^{[-1]}(a + c), \quad (5.6)$$

wobei $a \geq b$ und $c \geq 0$ gilt.

„ \Rightarrow “: Es gelte nun (5.3), d. h., $\varphi^{[-1]}$ genügt (5.6). Wir wählen $s, t \in [0, \infty]$, so daß $0 \leq s < t$ gilt. Setzen wir $a = (s+t)/2$, $b = s$ und $c = (t-s)/2$ in (5.6) ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} & \varphi^{[-1]} \left(\frac{s+t}{2} \right) + \varphi^{[-1]} \left(s + \frac{t-s}{2} \right) \leq \varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]} \left(\frac{s+t}{2} + \frac{t-s}{2} \right) \\ \Leftrightarrow & \varphi^{[-1]} \left(\frac{s+t}{2} \right) + \varphi^{[-1]} \left(\frac{s+t}{2} \right) \leq \varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t) \\ \Leftrightarrow & \varphi^{[-1]} \left(\frac{s+t}{2} \right) \leq \frac{\varphi^{[-1]}(s) + \varphi^{[-1]}(t)}{2}. \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit von $\varphi^{[-1]}$ folgt, daß $\varphi^{[-1]}$ und somit auch φ konvex ist.

„ \Leftarrow “: Sei nun $\varphi^{[-1]}$ konvex. Seien $a, b, c \in [0, 1]$ fest gewählt, so daß $a \geq b$ und $c \geq 0$ gilt. Wir setzen $\gamma = (a-b)/(a-b+c)$, so daß $a = (1-\gamma)b + \gamma(a+c)$ und $b+c = \gamma b + (1-\gamma)(a+c)$ gilt. Dann ist

$$\varphi^{[-1]}(a) \leq (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(b) + \gamma\varphi^{[-1]}(a+c)$$

und

$$\varphi^{[-1]}(b+c) \leq \gamma\varphi^{[-1]}(b) + (1-\gamma)\varphi^{[-1]}(a+c).$$

Addieren wir diese beiden Ungleichungen, so erhalten wir (5.6). Damit ist alles gezeigt.

□

Definition 5.2 (archimedische Copulas und Erzeuger) Copulas der Form (5.2) nennen wir archimedische Copulas. Die Funktion φ heißt ein Erzeuger des Copulas. Falls $\varphi(0) = \infty$ gilt, dann sagen wir, φ ist ein strenger Erzeuger. In diesem Falle gilt auch $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$, und wir nennen dann $C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$ ein strenges archimedisches Copula.

Bemerkung 5.1 Um genau zu sein, handelt es sich bei φ um einen *additiven* Erzeuger von C . Falls wir $\lambda(t) = e^{-\varphi(t)}$ und $\lambda^{[-1]}(t) = \varphi^{[-1]}(-\ln t)$ setzen, dann gilt $C(u, v) = \lambda^{[-1]}(\lambda(u)\lambda(v))$, so daß λ ein *multiplikativer* Erzeuger ist. Im Folgenden werden wir uns allerdings in erster Linie mit additiven Erzeugern beschäftigen.

Der folgende Satz beschreibt einige algebraische Eigenschaften von archimedischen Copulas.

Satz 5.4 *Sei C ein archimedisches Copula mit einem Erzeuger φ . Dann gelten die folgenden Eigenschaften:*

1. C ist symmetrisch in den Argumenten, d. h., es gilt $C(u, v) = C(v, u)$ für alle $u, v \in [0, 1]$,
2. C ist assoziativ, d. h., es gilt $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ für alle $u, v, w \in [0, 1]$,
3. für eine Konstante $c > 0$ ist $c\varphi$ auch ein Erzeuger von C .

Beweis:

Zu 1: Dies folgt direkt aus (5.2) und (5.5).

Zu 2: Es gilt

$$\begin{aligned} C(C(u, v), w) &= \varphi^{[-1]}(\varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v))) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v) + \varphi(w)) \\ &= \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(\varphi^{[-1]}(\varphi(v) + \varphi(w)))) \\ &= C(u, C(v, w)). \end{aligned}$$

Zu 3: Dies folgt aus (5.2) und der Tatsache, daß die Konvexität erhalten bleibt.

□

Betrachten wir den diagonalen Schnitt (vgl. Definition 3.8) eines archimedischen Copulas $\delta_C(u) = \varphi^{[-1]}(2\varphi(u))$, dann gilt wegen $\varphi^{[-1]}(\varphi(u)) = u$ für alle $u \in [0, 1]$ und der streng fallenden Monotonie von $\varphi^{[-1]}$ auf $[0, \varphi(0)]$, daß $\delta_C(u) < u$ für alle $u \in]0, 1[$. Diese Eigenschaft und die Assoziativität charakterisieren archimedische Copulas, wie wir im folgenden Satz sehen werden, dessen Beweis in [Lin65] zu finden ist.

Satz 5.5 *Sei C ein assoziatives Copula, so daß $\delta_C(u) < u$ für alle $u \in]0, 1[$ gilt. Dann ist C ein archimedisches Copula.*

Wir werden nun im Folgenden den Ursprung der Namensgebung für archimedische Copulas darlegen. Rufen wir uns das archimedische Axiom für positive reelle Zahlen in Erinnerung: Für zwei positive reelle Zahlen a, b existiert eine natürliche Zahl n , so daß $na > b$ gilt. Wir sind nun daran interessiert, dieses Axiom auf Copulas zu verallgemeinern. Dazu benötigen wir zunächst eine Begrifflichkeit, die in der folgenden Definition erklärt wird.

Definition 5.3 (C-Potenz) Sei C ein Copula. Dann definieren wir für $u \in [0, 1]$ die n -te C -Potenz u_C^n von u rekursiv durch $u_C^1 = u$ und $u_C^{n+1} = C(u, u_C^n)$.

Die Variante des archimedischen Axioms für $([0, 1], C)$ lautet dann wie folgt: Seien $u, v \in]0, 1[$ beliebig, dann existiert eine natürliche Zahl n , so daß $u_C^n < v$ gilt. Der folgende Satz zeigt uns, daß gerade die archimedischen Copulas dieser Variante des archimedischen Axioms genügen und daher auch ihren Namen erhalten haben. Der Ausdruck „archimedisch“ für diese Copulas wurde in [Lin65] eingeführt. Bevor wir uns nun dem folgenden Satz zuwenden, definieren wir uns noch die Menge der Erzeuger Ω^φ durch

$$\Omega^\varphi := \{\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty] \mid \varphi \text{ ist stetig, streng monoton fallend, konvex mit } \varphi(1) = 0\}.$$

Satz 5.6 Sei C ein archimedisches Copula, erzeugt durch $\varphi \in \Omega^\varphi$. Dann existiert für alle $u, v \in]0, 1[$ eine natürliche Zahl n , so daß $u_C^n < v$ gilt.

Beweis: Seien $u, v \in]0, 1[$ beliebig. Wir betrachten $u_C^2 = C(u, u_C^1) = C(u, u) = \delta_C(u) = \varphi^{[-1]}(2\varphi(u))$ und erhalten somit sukzessive $u_C^n = \varphi^{[-1]}(n\varphi(u))$. Da $u, v \in]0, 1[$ gilt, folgt $\varphi(u), \varphi(v) \in]0, \infty[$. Das archimedische Axiom impliziert nun, daß ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so daß $n\varphi(u) > \varphi(v)$ gilt. Da $v > 0$ gilt, folgt $\varphi(v) < \varphi(0)$. Dies zusammen mit der streng fallenden Monotonie von $\varphi^{[-1]}$ auf $[0, \varphi(0)]$ liefert $v = \varphi^{[-1]}(\varphi(v)) > \varphi^{[-1]}(n\varphi(u)) = u_C^n$. \square

Betrachten wir nun einige Beispiele, in denen wir untersuchen, ob die Fréchet-Hoeffding-Schranken M und W sowie das Produkt-Copula Π „archimedisch“ sind.

Beispiel 5.1 Das Produkt-Copula Π ist ein strenges archimedisches Copula. Sei $\varphi(t) = -\ln t$ für $t \in [0, 1]$, dann gilt $\varphi \in \Omega^\varphi$. Da zudem $\varphi(0) = \infty$ gilt, ist φ ein strenger Erzeuger. Daher gilt $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = e^{-t}$. Erzeugen wir nun C mittels (5.2), so erhalten wir $C(u, v) = e^{-((- \ln u) + (- \ln v))} = uv = \Pi(u, v)$.

Beispiel 5.2 Die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W ist ein archimedisches Copula. Sei $\varphi(t) = 1 - t$ für $t \in [0, 1]$, dann gilt $\varphi \in \Omega^\varphi$. Da $\varphi(0) = 1$ gilt, ist φ kein strenger Erzeuger. Weiterhin gilt

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} 1 - t, & t \in [0, 1], \\ 0, & t > 1, \end{cases} = \max(1 - t, 0).$$

Mittels (5.2) erhalten wir $C(u, v) = \max(1 - (1 - u + 1 - v), 0) = \max(u + v - 1, 0) = W(u, v)$.

Beispiel 5.3 Die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke M ist nicht archimedisch. Denn es gilt $\delta_M(u) = M(u, u) = \min(u, u) = u \not\prec u$ (siehe die Ausführungen unmittelbar vor Satz 5.5).

Wie wir in den Beispielen 5.1 und 5.2 gesehen haben, können wir archimedische Copulas nach Belieben erzeugen, indem wir Satz 5.3 verwenden. Wir müssen lediglich Funktionen φ finden, die uns als Erzeuger dienen, d. h., es muß $\varphi \in \Omega^\varphi$ gelten. Dann definieren wir das entsprechende Copula mittels (5.2).

Betrachten wir beispielsweise den Erzeuger $\varphi(t) = \frac{1}{t} - 1$, dann erhalten wir das Copula $C(u, v) = \frac{uv}{u+v-uv}$. Dieses Copula gehört zu zahlreichen Copula-Familien und wird daher auch mit „ $\frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$ “ bezeichnet. Eine kleine Auswahl an archimedischen Ein-Parameter-Familien ist in Tabelle 5.1 dargestellt, welche bis auf den teilweise modifizierten Definitionsbereich des Parameters θ aus [Nel03] entnommen wurde. Die Copulas der Ein-Parameter-Familien werden dementsprechend mit C_θ und die Erzeuger mit φ_θ bezeichnet. Eine Auswahl von 22 archimedischen Ein-Parameter-Familien ist in [Nel99] zu finden. Wir wollen uns aber im folgenden Beispiel auf die in Tabelle 5.1 angegebenen vier Familien beschränken.

Erzeuger	$\theta \in$	Copula
$\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$	$[-1, \infty[\setminus\{0\}$	Clayton
$\varphi(t) = \ln \frac{1-\theta(1-t)}{t}$	$[-1, 1[$	Ali-Mikhail-Haq
$\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$	$[1, \infty[$	Gumbel-Hougaard
$\varphi(t) = -\ln \frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$	$] -\infty, \infty[\setminus\{0\}$	Frank

Tabelle 5.1: Beispiele von archimedischen Ein-Parameter-Familien

Beispiel 5.4 a) Die Copulas der *Clayton-Familie* sind gegeben durch $C_\theta(u, v) = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0)$. Für $\theta \geq 0$ handelt es sich sogar um strenge archimedische Copulas. In den Grenz- bzw. Spezialfällen erhalten wir $C_{-1} = W$, $C_0 = \Pi$, $C_1 = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$ und $C_\infty = M$.¹

b) Bei den Copulas der *Ali-Mikhail-Haq-Familie* handelt es sich stets um strenge archimedische Copulas, welche gegeben sind durch $C_\theta(u, v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}$. Weiterhin gilt $C_0 = \Pi$ und $C_1 = \frac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$.

c) Die *Gumbel-Hougaard-Familie* wird auch stets streng erzeugt, und die Copulas sind durch $C_\theta(u, v) = e^{-[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta]^{1/\theta}}$ gegeben. In den Grenz- bzw. Spezialfällen ergibt sich $C_1 = \Pi$ und $C_\infty = M$.

¹Wir beachten, daß $C_\infty = M$ nicht im Widerspruch zu Beispiel 5.3 steht, da es sich lediglich um einen Grenzfall handelt.

- d) Stets streng wird zudem die *Frank-Familie* erzeugt. Die Copulas sind von der Gestalt $C_\theta(u, v) = -\frac{1}{\theta} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\theta u} - 1)(e^{-\theta v} - 1)}{e^{-\theta} - 1} \right)$. Es gilt $C_{-\infty} = W$, $C_0 = \Pi$ und $C_\infty = M$.

Satz 5.7 Sei C ein archimedisches Copula, erzeugt durch $\varphi \in \Omega^\varphi$, und sei

$$\begin{aligned} K_C(t) &= V_C(\{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid C(u, v) \leq t\}) \\ &= V_C(\{(u, v) \in [0, 1]^2 \mid \varphi(u) + \varphi(v) \leq \varphi(t)\}). \end{aligned}$$

Dann gilt für alle $t \in [0, 1]$

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}, \quad (5.7)$$

wobei $\varphi'(t^+)$ die einseitige Ableitung von φ an der Stelle t bezeichne.

Für den Beweis siehe [Nel99].

Korollar 5.8 Sei C ein archimedisches Copula, erzeugt durch $\varphi \in \Omega^\varphi$. Seien U und V U_{01} -verteilte Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion C . Dann ist die Funktion K_C aus (5.7) die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $C(U, V)$.

Falls wir nun ein Copula C gegeben haben, welches assoziativ ist und für das $\delta_C(u) < u$ für alle $u \in]0, 1[$ gilt, dann muß es nach Satz 5.5 archimedisches sein. Der folgende Satz liefert uns nun eine Technik, Erzeuger dieser Copulas zu finden.

Satz 5.9 Sei C ein archimedisches Copula, erzeugt durch $\varphi \in \Omega^\varphi$. Dann gilt f. s. für alle $u, v \in [0, 1]$

$$\varphi'(u) \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = \varphi'(v) \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}. \quad (5.8)$$

Beweis: Da φ konvex ist, existiert φ' f. s. auf $]0, 1[$. Mit Satz 3.8 existieren die partiellen Ableitungen $\partial C(u, v)/\partial u$ und $\partial C(u, v)/\partial v$ f. s. für alle $u, v \in [0, 1]$. Wenden wir nun die Kettenregel auf $\varphi(C(u, v)) = \varphi(u) + \varphi(v)$ an, so erhalten wir

$$\varphi'(C(u, v)) \frac{\partial C(u, v)}{\partial u} = \varphi'(u) \quad \text{und} \quad \varphi'(C(u, v)) \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = \varphi'(v).$$

Da nun φ streng monoton fallend ist, gilt $\varphi'(t) \neq 0$, wo immer die Ableitung existiert. Daraus folgt (5.8). \square

Wie wir bereits gesehen haben, bieten uns die Sätze 5.4 und 5.5 eine Möglichkeit, Copulas hinsichtlich ihrer archimedischen Eigenschaften zu untersuchen. Falls nun ein Copula als archimedisches charakterisiert wird, können wir mittels Satz 5.9 einen Erzeuger bestimmen. In den beiden folgenden Beispielen finden wir eine Anwendung dieser Sätze.

Beispiel 5.5 Sei C_θ ein Element der *Farlie-Gumbel-Morgenstern-Familie*², d. h., es gilt $C_\theta(u, v) = uv + \theta uv(1-u)(1-v)$ für $\theta \in [-1, 1]$. Falls diese Familie archimedisch wäre, dann müßte nach Satz 5.4 die Assoziativität gelten. Es ist allerdings leicht zu sehen, daß

$$C_\theta\left(\frac{1}{4}, C_\theta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)\right) \neq C_\theta\left(C_\theta\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right), \frac{1}{3}\right)$$

für alle $\theta \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ gilt. Daher ist das Produkt-Copula Π das einzige archimedische Element der Farlie-Gumbel-Morgenstern-Familie.

Beispiel 5.6 Betrachten wir die Copulas der Ali-Mikhail-Haq-Familie. Wie wir bereits wissen, sind diese archimedisch und nach Beispiel 5.4 durch $C_\theta(u, v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}$ gegeben. Um einen Erzeuger zu bestimmen, berechnen wir die partiellen Ableitungen von C_θ und erhalten mit (5.8)

$$\frac{\varphi'_\theta(u)}{\varphi'_\theta(v)} = \frac{\partial C_\theta(u, v)/\partial u}{\partial C_\theta(u, v)/\partial v} = \frac{v - \theta v + \theta v^2}{u - \theta u + \theta u^2}.$$

Somit gilt $\varphi'_\theta(t) = -c_\theta/(t - \theta t + \theta t^2)$ mit der Konstanten $c_\theta > 0$, da $\varphi'_\theta(t) < 0$ gilt. Daraus folgt, daß ein Erzeuger gegeben ist durch

$$\varphi_\theta(t) = \frac{c_\theta}{1-\theta} \ln \frac{1-\theta+\theta t}{t} \quad \text{für } \theta \in [-1, 1[$$

und $\varphi_1(t) = c_1 \left(\frac{1}{t} - 1\right).$

Setzen wir nun $c_1 = 1$ und $c_\theta = 1 - \theta$ für $\theta \in [-1, 1[$, dann erhalten wir für φ_θ den Ausdruck aus Tabelle 5.1.

Wir haben nun einige archimedische Ein-Parameter-Familien kennengelernt. Wir beenden diesen Abschnitt mit dem Hinweis, daß man auch archimedische Zwei-Parameter-Familien konstruieren kann, auf die wir hier allerdings nicht näher eingehen werden. Für den interessierten Leser sei an dieser Stelle auf [Nel99] verwiesen.

5.1.2 Kendalls τ rekapituliert

Wie wir bereits in Abschnitt 4.4 gesehen haben, ist Kendalls τ als zweidimensionales Integral bez. des Copulas C darstellbar, welches i. a. nicht einfach zu berechnen ist. Bei einem archimedischen Copula hingegen können wir Kendalls τ als eindimensionales Integral von dem Erzeuger des Copulas und der Ableitung des Erzeugers ausdrücken. Dies wird im folgenden Satz [GM86] verdeutlicht.

²Für die Herleitung dieser Familie siehe [Nel99].

Satz 5.10 Seien X und Y Zufallsvariablen mit einem archimedischen Copula C , erzeugt durch $\varphi \in \Omega^\varphi$. Dann ist Kendalls τ von X und Y gegeben durch

$$\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt. \quad (5.9)$$

Beweis: Seien U und V U_{01} -verteilte Zufallsvariablen mit gemeinsamer Verteilungsfunktion C . Weiterhin bezeichne K_C die Verteilungsfunktion von $C(U, V)$. Mit Bemerkung 4.1 erhalten wir

$$\tau_C = 4 \mathbb{E}(C(U, V)) - 1 = 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1.$$

Benutzen wir nun die Formel der partiellen Integration für Stieltjes-Integrale, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \tau_C &= 4 \int_0^1 t dK_C(t) - 1 \\ &= 4 \left([tK_C(t)]_0^1 - \int_0^1 K_C(t) dt \right) - 1 = 3 - 4 \int_0^1 K_C(t) dt. \end{aligned}$$

Mit Satz 5.7 und Korollar 5.8 folgt

$$K_C(t) = t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)}.$$

Da φ konvex ist, existieren $\varphi'(t^+)$ und $\varphi'(t^-)$ f.s. auf $]0, 1[$, und die Menge $\{t \in]0, 1[\mid \varphi'(t^+) \neq \varphi'(t^-)\}$ ist höchstens abzählbar, d. h., sie ist eine Nullmenge. Daher können wir $\varphi'(t^+)$ durch $\varphi'(t)$ ersetzen und erhalten die Behauptung durch

$$\tau_C = 3 - 4 \int_0^1 \left(t - \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t^+)} \right) dt = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt.$$

□

Beispiel 5.7 Betrachten wir die Clayton-Familie (vgl. Tabelle 5.1), dann ist ein Erzeuger gegeben durch $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ für $\theta \in [-1, \infty[\setminus \{0\}$. Dann gilt

$$\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta}.$$

Mit Satz 5.10 ist dann Kendalls τ für die Clayton-Familie gegeben durch

$$\tau_\theta = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t^{\theta+1} - t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left(\frac{1}{\theta+2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\theta}{\theta+2}.$$

Beispiel 5.8 Bei der Gumbel-Hougaard-Familie haben wir mit Tabelle 5.1 einen Erzeuger durch $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$ für $\theta \in [1, \infty[$ gegeben. Dann gilt

$$\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{t \ln t}{\theta}.$$

Verwenden wir wiederum Satz 5.10, dann ist Kendalls τ für die Gumbel-Hougaard-Familie mittels partieller Integration gegeben durch

$$\tau_\theta = 1 + 4 \int_0^1 \frac{t \ln t}{\theta} dt = 1 + \frac{4}{\theta} \left(\left[\frac{t^2}{2} \ln t \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{2} dt \right) = 1 + \frac{4}{\theta} \left(0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{\theta - 1}{\theta}.$$

5.1.3 Tail-Abhängigkeit rekapituliert

Bei strengen archimedischen Copulas können wir die Koeffizienten der oberen und unteren Tail-Abhängigkeit durch die Erzeuger darstellen, wie wir in den beiden folgenden Sätzen sehen werden, deren Beweise in [ELM01] zu finden sind.

Satz 5.11 Sei $\varphi \in \Omega^\varphi$, und es gelte zudem $\varphi(0) = \infty$, d. h., φ ist ein strenger Erzeuger, so daß $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ gilt. Falls $\varphi^{-1'}(0)$ endlich ist, dann hat

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v))$$

keine obere Tail-Abhängigkeit. Falls C obere Tail-Abhängigkeit hat, dann gilt $\varphi^{-1'}(0) = -\infty$, und der Koeffizient λ_U der oberen Tail-Abhängigkeit ist gegeben durch

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \downarrow 0} \frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)}. \quad (5.10)$$

Satz 5.12 Sei φ so gewählt wie in Satz 5.11. Dann ist der Koeffizient λ_L der unteren Tail-Abhängigkeit für das durch φ erzeugte Copula C gegeben durch

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)}. \quad (5.11)$$

Beispiel 5.9 Wie wir in Beispiel 5.4 gesehen haben, sind die Copulas der Gumbel-Hougaard-Familie streng archimedisch mit einem Erzeuger $\varphi(t) = (-\ln t)^\theta$. Somit gilt

$$\varphi^{-1}(s) = e^{-s^{1/\theta}} \quad \text{und} \quad \varphi^{-1'}(s) = \frac{-s^{1/\theta-1} e^{-s^{1/\theta}}}{\theta}.$$

Mit Satz 5.11 und (5.10) erhalten wir

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \downarrow 0} \frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)} = 2 - 2^{1/\theta} \lim_{s \downarrow 0} \frac{e^{-(2s)^{1/\theta}}}{e^{-s^{1/\theta}}} = 2 - 2^{1/\theta}.$$

Der Grenzwert λ_L der unteren Tail-Abhängigkeit existiert nicht.

Beispiel 5.10 Die Copulas der Clayton-Familie sind nach Beispiel 5.4 für $\theta > 0$ (den Grenzfall $\theta = 0$ außen vor gelassen) streng archimedisch. Ein Erzeuger ist gegeben durch $\varphi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$, so daß $\varphi^{-1}(s) = (1 + \theta s)^{-1/\theta}$ gilt. Mit Satz 5.11 und 5.12 erhalten wir

$$\lambda_U = 2 - 2 \lim_{s \downarrow 0} \frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)} = 2 - 2 \lim_{s \downarrow 0} \frac{(1 + 2\theta s)^{-1/\theta-1}}{(1 + \theta s)^{-1/\theta-1}} = 2 - 2 = 0 \quad \text{und}$$

$$\lambda_L = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{-1'}(2s)}{\varphi^{-1'}(s)} = 2 \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{(1 + 2\theta s)^{-1/\theta-1}}{(1 + \theta s)^{-1/\theta-1}} = 2 \cdot 2^{-1/\theta-1} = 2^{-1/\theta}.$$

5.1.4 Archimedische Copulas im n -Dimensionalen

In diesem Abschnitt werden wir die Erweiterung der 2-dimensionalen archimedischen Copulas aufs n -Dimensionale lediglich motivieren und mit Satz 5.13 notwendige und hinreichende Bedingungen für ein archimedisches n -Copula geben. Des weiteren werden wir den Begriff des *Quasi-Copulas* einführen. Für eine ausführlichere Auseinandersetzung mit n -dimensionalen archimedischen Copulas bzw. Quasi-Copulas sei auf [ELM01], [NMLbF02a] und [NMLbF02b] verwiesen.

Die Idee der Erweiterung aufs n -Dimensionale ist im n -dimensionalen Produkt-Copula Π^n zu finden. Wir können nämlich Π^n auch folgendermaßen schreiben:

$$\Pi^n(\mathbf{u}) = u_1 \cdots u_n = e^{-[(-\ln u_1) + \dots + (-\ln u_n)]}.$$

Dies führt uns zu der folgenden natürlichen Verallgemeinerung von (5.2):

$$C^n(\mathbf{u}) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)). \quad (5.12)$$

Im 3-dimensionalen Fall erhalten wir

$$C^3(u_1, u_2, u_3) = \varphi^{[-1]}(\varphi \circ \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) + \varphi(u_3)) = C(C(u_1, u_2), u_3),$$

und im 4-dimensionalen Fall gilt

$$\begin{aligned} C^4(u_1, \dots, u_4) &= \varphi^{[-1]}(\varphi \circ \varphi^{[-1]}(\varphi \circ \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) + \varphi(u_3)) + \varphi(u_4)) \\ &= C(C^3(u_1, u_2, u_3), u_4) = C(C(C(u_1, u_2), u_3), u_4), \end{aligned}$$

so daß wir im allgemeinen Fall für $n \geq 3$

$$C^n(u_1, \dots, u_n) = C(C^{n-1}(u_1, \dots, u_{n-1}), u_n)$$

erhalten. Auf diese Art und Weise höherdimensionale Copulas zu konstruieren, gilt i. a. nicht. Da archimedische Copulas aber nach Satz 5.4 symmetrisch und assoziativ sind, scheint C^n , so wie in (5.12) definiert, unter bestimmten Zusatzvoraussetzungen in der Tat ein Copula für $n \geq 3$ zu sein. Dazu betrachten wir zunächst die folgende Definition.

Definition 5.4 (vollmonoton [Wid41]) Eine Funktion $g(t)$ ist vollmonoton auf einem Intervall I , falls sie dort stetig ist und Ableitungen aller Ordnungen existieren, welche im Vorzeichen wechseln, d. h., g genügt

$$(-1)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0 \quad (5.13)$$

für alle $t \in I^\circ$ und $k = 0, 1, 2, \dots$, wobei I° das Innere des Intervalls I bezeichnet.

Bemerkung 5.2 Falls $g(t)$ vollmonoton auf $[0, \infty[$ ist und ein $c > 0$ existiert, so daß $g(c) = 0$ gilt, dann ist $g(t) = 0$ für alle $t \in [0, \infty[$. Falls nun also das Pseudo-Inverse $\varphi^{[-1]}$ eines archimedischen Erzeugers φ vollmonoton ist, dann folgt $\varphi^{[-1]}(t) > 0$ für alle $t \in [0, \infty[$, so daß φ ein strenger Erzeuger ist und somit $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$ gilt.

Der folgende Satz [Kim74] liefert uns nun notwendige und hinreichende Bedingungen für die Funktion in (5.12), um für $n \geq 2$ ein n -Copula zu sein.

Satz 5.13 Sei $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ eine stetige und streng monoton fallende Funktion mit $\varphi(0) = \infty$ und $\varphi(1) = 0$, und bezeichne φ^{-1} das Inverse von φ . Falls $C^n: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ durch (5.12) gegeben ist, dann ist C^n dann und nur dann ein n -Copula für alle $n \geq 2$, falls φ^{-1} vollmonoton auf $[0, \infty[$ ist.

Das folgende Korollar liefert uns eine Einschränkung, wenn wir archimedische Copulas mit den Bedingungen von Satz 5.13 aufs n -Dimensionale erweitern. Es besagt nämlich, daß wir mit vollmonotonen Inversen der strengen Erzeuger nur positive Abhängigkeit modellieren können.

Korollar 5.14 Falls das Inverse φ^{-1} eines strengen Erzeugers φ eines archimedischen Copulas vollmonoton ist, dann gilt $C \succ \Pi$.

Betrachten wir einmal den Erzeuger $\varphi(t) = 1 - t$ der Clayton-Familie (vgl. Tabelle 5.1 mit $\theta = -1$) und wenden diesen auf (5.12) an. Dann erzeugt uns dieser die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W^n . Wie wir bereits wissen, ist diese für $n \geq 3$ kein n -Copula. Sie ist jedoch die bestmögliche untere Schranke. Dies veranlaßt uns zu der folgenden aus [NMLbF02a] übernommenen Definition.

Definition 5.5 (Quasi-Copula) Ein n -dimensionales Quasi-Copula (im Folgenden kurz n -Quasi-Copula) ist eine Funktion $C_q: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ mit den folgenden Eigenschaften:³

1. Für alle $\mathbf{u} \in [0, 1]^n$ gilt

$$C_q(\mathbf{u}) = 0, \text{ falls mindestens eine Komponente von } \mathbf{u} \text{ gleich } 0 \text{ ist,} \quad (5.14)$$

³In der Literatur wird das Quasi-Copula mit Q bezeichnet. Da wir aber bereits die Konkordanz-Funktion mit Q deklariert haben, benutzen wir das Symbol C_q .

und

$$C_q(\mathbf{u}) = u_k, \text{ falls alle Komponenten von } \mathbf{u} \text{ gleich 1 sind außer } u_k \text{ selbst,} \quad (5.15)$$

2. C_q ist monoton steigend in jedem Argument,
3. C_q genügt der Lipschitz-Bedingung

$$|C_q(\mathbf{v}) - C_q(\mathbf{u})| \leq \sum_{k=1}^n |v_k - u_k| \quad (5.16)$$

für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in [0, 1]^n$.

Bemerkung 5.3 Natürlich ist jedes n -Copula ein n -Quasi-Copula. Es gibt auch n -Quasi-Copulas, die n -Copulas sind (im Falle $n = 2$ sind alle Quasi-Copulas auch Copulas, da dann die Quasi-Monotonie äquivalent zur Lipschitz-Bedingung ist). Falls jedoch ein n -Quasi-Copula kein n -Copula ist, dann bezeichnen wir es als *eigentliches* n -Quasi-Copula.

Betrachten wir nun die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W^n , dann sehen wir, daß sie den Bedingungen für ein n -Quasi-Copula genügt. W^n ist ein archimedisches n -Quasi-Copula, da es den Erzeuger $\varphi(t) = 1 - t$ hat. Ein archimedisches n -Quasi-Copula muß demzufolge (5.12) und Definition 5.5 genügen mit $\varphi \in \Omega^\varphi$. Weitreichende Ausführungen finden sich, wie oben schon erwähnt, in [NMLbF02a] und [NMLbF02b].

5.2 Gaußsche Copulas

In diesem Abschnitt werden wir zunächst sphärische und elliptische Verteilungen und anschließend Gaußsche Copulas vorstellen, ohne dabei nähere Details zu untersuchen. Sie sollen vielmehr deshalb eingeführt werden, da man bei ihnen von der linearen Korrelation effektiv Gebrauch machen kann, welche, wie schon in Kapitel 4 erwähnt, in der Praxis am häufigsten verbreitet ist. Detaillierte Ausführungen sind in [ELM01] und [EMS02] zu finden.

Eine sphärische Verteilung ist eine Erweiterung der multivariaten Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$.

Definition 5.6 (sphärische Verteilung) Ein Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ hat eine sphärische Verteilung, falls für alle orthogonalen Abbildungen $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (d. h., es gilt $UU^t = U^tU = \mathbf{I}_n$)

$$U\mathbf{X} =_d \mathbf{X}$$

gilt.

Die charakteristische Funktion $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \mathbb{E}(e^{i\mathbf{t}^t\mathbf{X}})$ von \mathbf{X} hat dann eine besonders einfache Form. Es existiert eine Funktion $\phi: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = \phi(\mathbf{t}^t\mathbf{t}) = \phi(t_1^2 + \dots + t_n^2)$ gilt. Die Funktion ϕ wird als *charakteristischer Erzeuger* der sphärischen Verteilung bezeichnet, und wir schreiben

$$\mathbf{X} \sim S_n(\phi).$$

Beispiel 5.11 Sei $\mathbf{X} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I}_n)$, dann gilt bekannterweise

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{-\frac{\mathbf{t}^t\mathbf{t}}{2}},$$

und somit $\phi(u) = e^{-u/2}$.

Elliptische Verteilungen sind affine Abbildungen der sphärischen Verteilungen.

Definition 5.7 (elliptische Verteilung) Sei $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine affine Abbildung mit $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x} + \boldsymbol{\mu}$, wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^n$. Der Zufallsvektor \mathbf{X} hat eine elliptische Verteilung, falls $\mathbf{X} = T(\mathbf{Y})$ und $\mathbf{Y} \sim S_n(\phi)$ gilt.

Da die charakteristische Funktion von \mathbf{X} auch geschrieben werden kann als

$$\psi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = e^{i\mathbf{t}^t\boldsymbol{\mu}}\phi(\mathbf{t}^t\Sigma\mathbf{t}) \quad \text{mit } \Sigma := AA^t,$$

benutzen wir die Schreibweise

$$\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi).$$

Hier ist lediglich $\boldsymbol{\mu}$ eindeutig bestimmt. Da Σ und ϕ bis auf eine positive Konstante bestimmt sind, können wir Σ auch als Kovarianzmatrix interpretieren. Eine elliptisch verteilte Zufallsvariable $\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi)$ ist daher durch den Erwartungswert, die Kovarianzmatrix und den charakteristischen Erzeuger bestimmt.

Das n -dimensionale *Gaußsche Copula* ist gegeben durch

$$C_R^{Ga}(\mathbf{u}) = \Phi_R^n(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)),$$

wobei Φ_R^n die gemeinsame Verteilungsfunktion der multivariaten Standardnormalverteilung mit linearer Korrelationsmatrix R bezeichnet, und Φ^{-1} bezeichnet das Inverse der Verteilungsfunktion der eindimensionalen Standardnormalverteilung. Dann läßt sich im 2-dimensionalen Fall das Gaußsche Copula schreiben als

$$C_R^{Ga}(u, v) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-R_{12}^2}} e^{-\frac{s^2-2R_{12}st+t^2}{2(1-R_{12}^2)}} ds dt,$$

wobei R_{12} natürlich der gewöhnliche Korrelationskoeffizient ist.

In [ELM01] wird gezeigt, daß Gaußsche Copulas weder obere noch untere Tail-Abhängigkeit haben.

6 Anwendungen

Zunächst einmal sei erwähnt, daß wir in diesem Kapitel nicht die alles umfassende Copula-basierte Formel vorstellen werden, die uns den Value-at-Risk berechnet. Die Anwendung der Copulas auf den VaR liegt vielmehr in Kapitel 4 begründet. Hier haben wir die verschiedenen Möglichkeiten kennengelernt, Abhängigkeiten mit Copulas zu modellieren. Und genau das ist die Stärke der Copulas. Das Quantil einer Verteilung zu berechnen ist eine technisch bedingte Sache (wenn vielleicht auch nicht immer einfach), auf die wir hier nicht unser Augenmerk richten werden.

Die Anwendung liegt also in der Modellierung komplexer Abhängigkeitsstrukturen in Portefeuilles. Copulas erlauben die getrennte Modellierung der einzelnen Risikofaktoren und der Abhängigkeitsstruktur zwischen den Risikofaktoren. Zusätzlich eröffnet uns dieses Vorgehen die Möglichkeit der separaten Anpassung und Validierung eindimensionaler Verteilungsfunktionen und Copulas, womit wir wertvolle Informationen über den strukturellen Aufbau des Gesamtproblems gewinnen können. Wir haben also die Möglichkeit, den einzelnen Risikofaktoren verschiedene Verteilungsfunktionen zuzuordnen und können dann mit geeigneten Copulas mittels des Satzes von Sklar gemeinsame Verteilungsfunktionen erzeugen, aus denen dann der VaR berechnet werden kann.

Neben dem analytischen VaR-Konzept ist in der Praxis häufig die Monte-Carlo-Simulation¹ zu finden, welche die Verteilung der Wertänderungen eines Portefeuilles durch Realisationen der stochastischen Renditen generiert. Die klassische Monte-Carlo-Simulation setzt voraus, daß die stochastischen Renditen multivariat normalverteilt sind. Wir haben aber nun die Möglichkeit, diesen Simulationsansatz mittels Copulas auf beliebig verteilte Renditen zu erweitern. Die Stichproben werden dann aus der durch das Copula generierten Verteilung gezogen.

Wenn wir uns die obere Tail-Abhängigkeit in Erinnerung rufen, dann sehen wir, daß diese ganz konkret eine Aussage über den VaR macht. Denn es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{\alpha \uparrow 1} \mathbb{P}[Y > G^{(-1)}(\alpha) \mid X > F^{(-1)}(\alpha)] \\ &= \lim_{\alpha \uparrow 1} \mathbb{P}[Y > \text{VaR}_\alpha(Y) \mid X > \text{VaR}_\alpha(X)]. \end{aligned}$$

Dies liefert uns sozusagen die Wahrscheinlichkeit für einen „worst case“, d. h., wir interessieren uns dafür, wie groß die Wahrscheinlichkeit für ein Überschreiten des VaR des einen Risikofaktors ist unter der Voraussetzung, daß der andere Risikofaktor den VaR

¹Eine exakte Vorgehensweise der Monte-Carlo-Simulation ist in [Hul99] zu finden.

überschreitet. Wie wir gesehen haben, läßt sich diese Wahrscheinlichkeit durch das zugrundeliegende Copula bestimmen. Handelt es sich hierbei zudem noch um ein strenges archimedisches Copula, so läßt sich die obere Tail-Abhängigkeit durch den Erzeuger bestimmen. Bei den vielen Ein-Parameter-Familien der archimedischen Copulas läßt sich schließlich die Tail-Abhängigkeit durch eine geeignete Wahl des jeweiligen Parameters spezifizieren.

Da in der Praxis viele Risikofaktoren die Eigenschaft der Tail-Abhängigkeit haben, spricht man auch vom „Gaussian copulas lack“, da Gaußsche Copulas weder obere noch untere Tail-Abhängigkeit besitzen. In der „elliptischen Welt“ ist allerdings die lineare Korrelation ein geeignetes Risikomaß. Zudem ist in dieser Welt der VaR ein kohärentes Risikomaß und steht im Einklang zur Markowitz-Methode, in der die Varianz als Risikomaß benutzt wird.²

Es läßt sich also zusammenfassend festhalten, daß es nicht die „eine“ Anwendung der Copulas gibt, sondern, ein gegebenes Problem vor Augen, eine Vielzahl an Möglichkeiten existiert, aus denen man dann individuell selektieren muß, um sein Problem möglichst optimal zu lösen. Wir wollen dieses Kapitel und damit diese Arbeit mit dem Verweis auf die Arbeiten [EHJ01] und [JRR03] beenden, die sich intensiv mit verschiedenen Anwendungen beschäftigen.

²Für die Definition eines kohärenten Risikomaßes sei an dieser Stelle auf den Anhang verwiesen, in dem auch der VaR mit Satz A.1 in die „elliptische Welt“ eingeordnet und in Einklang mit Markowitz' Risikominimierungsportefeuille gebracht wird.

A Anhang

Ein *kohärentes Risikomaß* ist im Sinne von [ADEH99] eine reellwertige Funktion ϱ auf dem Raum der reellwertigen Zufallsvariablen, welche nur von der Verteilung einer Zufallsvariablen¹ X abhängig ist und den folgenden Eigenschaften genügt:

T *Translationsinvarianz.* Für eine Zufallsvariable X und alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\varrho(X + a) = \varrho(X) + a$.

S *Subadditivität.* Für zwei beliebige Zufallsvariablen X und Y gilt $\varrho(X+Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$.

PH *Positive Homogenität.* Für eine Zufallsvariable X und $\lambda \geq 0$ gilt $\varrho(\lambda X) = \lambda \varrho(X)$.

M *Monotonie.* Für zwei Zufallsvariablen X und Y mit $X \geq Y$ gilt $\varrho(X) \geq \varrho(Y)$.

In der „elliptischen Welt“ ist der Gebrauch von beliebigen positiven homogenen und translationsinvarianten Risikomaßen, um Risiken einzuordnen oder um die optimalen risikominimierenden Portefeuille-Gewichte zu bestimmen, äquivalent zur Markowitz-Methode, welche die Varianz als Risikomaß benutzt. Alternative Risikomaße, wie z. B. der VaR, liefern zwar unterschiedliche Zahlenwerte, haben aber keine Auswirkung auf das Risikomanagement. Dies wird im folgenden Satz [EMS02] verdeutlicht, dem die Annahme zugrundeliegt, daß die meisten Standardmethoden im Risikomanagement von linearen Portefeuilles mit elliptisch verteilten Risikofaktoren ausgehen.

Satz A.1 Sei $\mathbf{X} \sim E_n(\boldsymbol{\mu}, \Sigma, \phi)$ mit $\sigma_{X_i}^2 < \infty$ für alle i . Ferner sei

$$\mathcal{P} = \left\{ Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \right\}$$

die Menge aller linearen Portefeuilles. Dann gelten die folgenden Aussagen:

1. Subadditivität des VaR. Für beliebige Portefeuilles $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}$ und $0,5 \leq \alpha < 1$ gilt

$$\text{VaR}_\alpha(Z_1 + Z_2) \leq \text{VaR}_\alpha(Z_1) + \text{VaR}_\alpha(Z_2).$$

¹Wir weisen positiven Werten der Zufallsvariablen Verluste zu, wohingegen die Autoren in [ADEH99] negative Werte der Zufallsvariablen als Verluste und positive Werte als Gewinne interpretieren.

2. Äquivalenz zwischen der Varianz und positiven homogenen Risikomaßen. Sei ϱ ein reellwertiges Risikomaß auf dem Raum der reellwertigen Zufallsvariablen, welches nur von der Verteilung einer Zufallsvariablen X abhängig ist. Des weiteren genüge dieses Risikomaß **PH**. Dann gilt für alle $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}$

$$\varrho(Z_1 - \mathbb{E}(Z_1)) \leq \varrho(Z_2 - \mathbb{E}(Z_2)) \Leftrightarrow \sigma_{Z_1}^2 \leq \sigma_{Z_2}^2.$$

3. Markowitz' Risikominimierungsportefeuille. Sei ϱ so gewählt wie in 2, und ϱ genüge zudem **T**. Sei

$$\mathcal{E} = \left\{ Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \mathbb{E}(Z) = r \right\}$$

die Teilmenge aller Portefeuilles mit einer erwarteten Rendite r . Dann gilt

$$\arg \min_{Z \in \mathcal{E}} \varrho(Z) = \arg \min_{Z \in \mathcal{E}} \sigma_Z^2.$$

Beweis: Zunächst einmal halten wir fest, daß (Z_1, Z_2) elliptisch verteilt ist, so daß Z_1 , Z_2 und $Z_1 + Z_2$ Verteilungen desselben Typs haben, d. h., sie haben denselben charakteristischen Erzeuger.

Zu 1: Sei $0,5 \leq \alpha < 1$, und bezeichne q_α das α -Quantil der korrespondierenden standardisierten Verteilung. Dann gilt

$$\begin{aligned} \text{VaR}_\alpha(Z_1) &= \mathbb{E}(Z_1) + \sigma_{Z_1} q_\alpha, \\ \text{VaR}_\alpha(Z_2) &= \mathbb{E}(Z_2) + \sigma_{Z_2} q_\alpha \quad \text{und} \\ \text{VaR}_\alpha(Z_1 + Z_2) &= \mathbb{E}(Z_1 + Z_2) + \sigma_{Z_1 + Z_2} q_\alpha. \end{aligned}$$

Aus $\sigma_{Z_1 + Z_2} \leq \sigma_{Z_1} + \sigma_{Z_2}$ und $q_\alpha \geq 0$ folgt die Behauptung.

Zu 2: Es existiert ein $a > 0$, so daß $Z_1 - \mathbb{E}(Z_1) =_d a(Z_2 - \mathbb{E}(Z_2))$ gilt. Daraus folgt $a \leq 1 \Leftrightarrow \sigma_{Z_1}^2 \leq \sigma_{Z_2}^2$. Da ϱ nach Voraussetzung positiv homogen und nur von der Verteilung der Zufallsvariablen Z abhängig ist, gilt

$$\varrho(Z_1 - \mathbb{E}(Z_1)) = \varrho(a(Z_2 - \mathbb{E}(Z_2))) = a\varrho(Z_2 - \mathbb{E}(Z_2)).$$

Die Behauptung folgt nun mit

$$\varrho(Z_1 - \mathbb{E}(Z_1)) \leq \varrho(Z_2 - \mathbb{E}(Z_2)) \Leftrightarrow a \leq 1 \Leftrightarrow \sigma_{Z_1}^2 \leq \sigma_{Z_2}^2.$$

Zu 3: Wir betrachten nun Portefeuilles aus \mathcal{E} , dann gilt die Behauptung aus 2 mit $\mathbb{E}(Z_1) = \mathbb{E}(Z_2) = r$. Aus der Translationsinvarianz von ϱ folgt $\varrho(Z_j - r) = \varrho(Z_j) - r$ für $j = 1, 2$. Somit gilt

$$\varrho(Z_1) \leq \varrho(Z_2) \Leftrightarrow \sigma_{Z_1}^2 \leq \sigma_{Z_2}^2,$$

woraus die Behauptung folgt. □

Symbolverzeichnis

(Ω, \mathfrak{A})	Meßraum, Seite 22
$(\Omega, \mathfrak{A}, P)$	Wahrscheinlichkeitsraum, Seite 15
$[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$	n -Box, Seite 24
$[x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$	Rechteck $(x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R})$, Seite 7
$\text{Cov}(X, Y)$	Kovarianz von X und Y , Seite 35
δ_C	der diagonale Schnitt von C , Seite 15
Dom	Definitionsbereich, Seite 7
E	Erwartungswert, Seite 41
λ_L	Koeffizient der unteren Tail-Abhängigkeit, Seite 46
λ_U	Koeffizient der oberen Tail-Abhängigkeit, Seite 46
ln	der natürliche Logarithmus, Seite 57
\mathbf{a}	n -Tupel (a_1, \dots, a_n) , Seite 24
\mathbf{I}_n	Einheitsmatrix, Seite 66
\mathbf{X}	Zufallsvektor $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$, Seite 35
$\mathcal{B}(\mathbb{R})$	Borelsche σ -Algebra auf \mathbb{R} , Seite 16
\mathfrak{A}	σ -Algebra, Seite 15
\mathbb{N}	natürliche Zahlen, Seite 41
NLOD	negatively lower orthant dependent, Seite 53
NOD	negatively orthant dependent, Seite 53
NQD	negatively quadrant dependent, Seite 47

NUOD	negatively upper orthant dependent, Seite 53
Ω	Stichprobenraum, Seite 15
Ω^φ	Menge der Erzeuger von archimedischen Copulas, Seite 58
$\overline{\mathbb{R}}$	erweiterte Zahlengerade $[-\infty, \infty]$, Seite 7
\overline{F}	survival function von F , Seite 32
\overline{S}	der Abschluß der Menge S , Seite 17
Π	Produkt-Copula, Seite 11
PLOD	positively lower orthant dependent, Seite 52
POD	positively orthant dependent, Seite 53
PQD	positively quadrant dependent, Seite 47
P	Wahrscheinlichkeitsmaß, Seite 5
$\psi_{\mathbf{X}}$	charakteristische Funktion von \mathbf{X} , Seite 67
PUOD	positively upper orthant dependent, Seite 53
\mathbb{R}	reelle Zahlen, Seite 7
\mathbb{R}^+	die positiven reellen Zahlen einschließlich der Null $[0, \infty[$, Seite 67
Ran	Bildbereich, Seite 7
$\rho(X, Y)$	Korrelationskoeffizient von X und Y , Seite 35
$\rho_{X,Y}^S$	Spearman's ρ von X und Y , Seite 42
σ_X^2	Varianz von X , Seite 5
$\tau_{X,Y}$	Kendalls τ von X und Y , Seite 41
VaR	Value-at-Risk, Seite 3
ε_a	Punktmaß bzw. Heaviside-Funktion oder Dirac-Verteilung, Seite 16
$\varphi^{[-1]}$	das Pseudo-Inverse von φ , Seite 54
\widehat{C}	survival copula, Seite 32
B^t	die Transponierte von B , Seite 36

C	Copula, Seite 10
C_q	Quasi-Copula, Seite 65
$F^{(-1)}$	das Quasi-Inverse von F , Seite 4
F^{-1}	das Inverse von F , Seite 4
I°	das Innere des Intervalls I , Seite 65
M	obere Fréchet-Hoeffding-Schranke, Seite 11
Q	Konkordanz-Funktion, Seite 39
u_C^n	n -te C -Potenz von u , Seite 58
U_{ab}	Gleichverteilung auf $[a, b]$, Seite 16
$V_H(B)$	H -Volumen des Rechtecks B , Seite 7
W	untere Fréchet-Hoeffding-Schranke, Seite 11
$:=$	ist definiert durch, Seite 8
$=_d$	Gleichheit in Verteilung, Seite 37
\emptyset	leere Menge, Seite 7
\prec	kleiner als (bez. Konkordanz-Ordnung), Seite 34
\sim	ist verteilt wie, Seite 42

Abbildungsverzeichnis

2.1	Value-at-Risk als Quantil der Verteilung der Wertänderungen eines Portefeuilles.	4
3.1	Die obere Fréchet-Hoeffding-Schranke M	13
3.2	Die untere Fréchet-Hoeffding-Schranke W	13
3.3	Das Produkt-Copula Π	14
3.4	Der von M und W erzeugte Vierflächner.	14
3.5	Kompliziertester Fall im Beweis von Lemma 3.10.	18
4.1	Der von M und Π erzeugte Dreiflächner.	48
4.2	Der von W und Π erzeugte Dreiflächner.	48
4.3	Der von M und W erzeugte Vierflächner.	48

Tabellenverzeichnis

5.1	Beispiele von archimedischen Ein-Parameter-Familien	59
-----	---	----

Literaturverzeichnis

- [ADEH99] ARTZNER, P., F. DELBAEN, J.-M. EBER und D. HEATH: *Coherent measures of risk*. *Mathematical Finance*, 9(3):203–228, 1999.
- [Bas96] BASLER AUSSCHUSS FÜR BANKENAUF SICHT: *Änderung der Eigenkapitalvereinbarung zur Einbeziehung der Marktrisiken*. Basel, Januar 1996, 1996.
- [Bas99] BASLE COMMITTEE ON BANKING SUPERVISION: *Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications*. Basel, 1999.
- [Bau91] BAUER, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. de Gruyter, Berlin u. a., 4. Auflage, 1991.
- [BKS98] BÜHLER, W., O. KORN und A. SCHMIDT: *Ermittlung von Eigenkapitalanforderungen mit „Internen Modellen“*. *Die Betriebswirtschaft*, 58:64–85, 1998.
- [BS98] BÜHLER, W. und A. SCHMIDT: *Bank-Risikomanagement mit internen Modellen*. *Schriften des Vereins für Socialpolitik*, 261:69–121, 1998.
- [Bun97] BUNDESAUFSICHTAMT FÜR DAS KREDITWESEN: *Bekanntmachung über die Änderung und Ergänzung der Grundsätze über das Eigenkapital und die Liquidität der Kreditinstitute*. Berlin, 29. Mai 1997, 1997.
- [CGM00] CROUHY, M., D. GALAI und R. MARK: *A comparative analysis of current credit risk models*. *Journal of banking and finance*, 24:59–117, 2000.
- [Deu98] DEUTSCHE BUNDESBANK: *Banks' internal risk management models and their prudential recognition*. *Deutsche Bundesbank Monthly Report*, October 1998:65–80, 1998.
- [EHJ01] EMBRECHTS, P., A. HÖING und A. JURI: *Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks*. Working paper. Risklab: <http://www.risklab.ch>, 2001.

- [ELM01] EMBRECHTS, P., F. LINDSKOG und A. MCNEIL: *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*. Working paper. Risklab: <http://www.risklab.ch>, 2001.
- [EMS02] EMBRECHTS, P., A. MCNEIL und D. STRAUMANN: *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*. In: DEMPSTER, M. (Herausgeber): *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Seiten 176–223. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [EU-93] EU-KOMMISSION: *Richtlinie 93/6/EWG des Rates vom 15. März 1993 über die angemessene Eigenkapitalausstattung von Wertpapierfirmen und Kreditinstituten*. Amtsblatt der Europäischen Gemeinschaften, Nr. L 141:1–26, 1993.
- [FH99] FRANKE, G. und H. HAX: *Finanzwirtschaft des Unternehmens und Kapitalmarkt*. Springer, Berlin u. a., 4. Auflage, 1999.
- [GM86] GENEST, C. und J. MACKAY: *The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals*. *The American Statistician*, 40(4):280–283, 1986.
- [Hul99] HULL, J. C.: *Options, Futures, and other Derivatives*. Englewood Cliffs, 4. Auflage, 1999.
- [JRR03] JOUANIN, J.-F., G. RIBOULET und T. RONCALLI: *Financial Applications of Copula Functions*. Working paper. Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France: <http://gro.creditlyonnais.fr>, 2003.
- [Kim74] KIMBERLING, C. H.: *A probabilistic interpretation of complete monotonicity*. *Aequationes Mathematicae*, 10:152–164, 1974.
- [Kru58] KRUSKAL, W. H.: *Ordinal measures of association*. *Journal of the American Statistical Association*, 53:814–861, 1958.
- [Leh66] LEHMANN, E. L.: *Some Concepts of Dependence*. *Annals of Mathematical Statistics*, 37:1137–1153, 1966.
- [Lin65] LING, C.-H.: *Representation of associative functions*. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, 12:189–212, 1965.
- [MS75] MOORE, D. S. und M. C. SPRUILL: *Unified large-sample theory of general chisquared statistics for tests of fit*. *Annals of Statistics*, 3:599–616, 1975.
- [Nel99] NELSEN, R. B.: *An Introduction to Copulas*. Springer, New York, 1999.

- [Nel02] NELSEN, R. B.: *Concordance and copulas: A survey*. In: CUADRAS, C. M., J. FORTIANA und J. A. RODRÍGUEZ LALLENA (Herausgeber): *Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling*, Seiten 169–178. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [Nel03] NELSEN, R. B.: *Properties and applications of copulas: A brief survey*. In: DHAENE, J., N. KOLEV und P. MORETTIN (Herausgeber): *Proceedings of the First Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance*, Seiten 10–28. Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, 2003.
- [NMLbF02a] NELSEN, R. B., J. J. QUESADA MOLINA, J. A. RODRÍGUEZ LALLENA und M. ÚBEDA FLORES: *Multivariate Archimedean quasi-copulas*. In: CUADRAS, C. M., J. FORTIANA und J. A. RODRÍGUEZ LALLENA (Herausgeber): *Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling*, Seiten 179–186. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [NMLbF02b] NELSEN, R. B., J. J. QUESADA MOLINA, J. A. RODRÍGUEZ LALLENA und M. ÚBEDA FLORES: *Some new properties of quasi-copulas*. In: CUADRAS, C. M., J. FORTIANA und J. A. RODRÍGUEZ LALLENA (Herausgeber): *Distributions with Given Marginals and Statistical Modelling*, Seiten 187–194. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.
- [Rei99] REICHLING, P.: *Risikomessung durch Volatilität, Value-at-Risk oder Lower-Partial-Moment*. In: ELLER, R. (Herausgeber): *Handbuch Bankenaufsicht und interne Risikosteuerungsmodelle*, Seiten 223–235. Stuttgart, 1999.
- [Sca84] SCARSINI, M.: *On measures of concordance*. *Stochastica*, 8:201–218, 1984.
- [Sch03] SCHMITZ, V.: *Copulas and Stochastic Processes*. Shaker, Aachen, 2003.
- [Skl96] SKLAR, A.: *Random variables, distribution functions, and copulas – a personal look backward and forward*. In: RÜSCHENDORF, L., B. SCHWEIZER und M. D. TAYLOR (Herausgeber): *Distributions with Fixed Marginals and Related Topics*, Seiten 1–14. Institute of Mathematical Statistics, Hayward, CA, 1996.
- [SS83] SCHWEIZER, B. und A. SKLAR: *Probabilistic Metric Spaces*. North-Holland, New York, 1983.
- [WD98] WANG, S. und J. DHAENE: *Comonotonicity, Correlation Order and Premium Principles*. *Insurance: Mathematics and Economics*, 22 (3):235–242, 1998.

- [Wid41] WIDDER, D. V.: *The Laplace Transform*. Princeton University Press, 1941.